

Mini corso geometria del triangolo e non solo

info@joaogas.it

12 ottobre 2011



- 1 Indice
- 2 Premessa
- 3 I problemi
 - Il volo dello sparviero
 - Triangoli "minimi" dentro triangoli
 - "Strano" biliardo
- 4 Non solo triangoli
 - "Rettangolo" di area massima
- 5 Problema ... che non ti aspetti
- 6 Riferimenti Bibliografici



Gabriele Lolli Discorso sulla matematica

«... la scienza nelle sue spiegazioni del mondo ha bisogno di linguaggi con concetti e termini che sono della stessa natura di quelli dei linguaggi naturali, dei nomi collettivi per esempio: gli elettroni non sono come le vespe, cioè il concetto di "elettrone" non è come il concetto di "vespa"; l'etere era un fluido nel senso che diciamo che l'aria è un fluido. Le regole sintattiche sono analoghe, ma l'interpretazione operativa tutt'altra. la consapevolezza di quest'alterità è quello che ci evita di restare sconvolti, o di correre a dire che la scienza è in crisi, quando la scienza cambia le sue spiegazioni, e certe cose scompaiono, come l'etere, e come scomparirà ancora altro in futuro. A volte anche ritornano.



La scienza cambia i suoi linguaggi. Quando cambia il linguaggio, a cambiare non è il mondo, ma sono gli uomini. Le cose di cui la scienza dice che è fatto il mondo non sono cose di questo mondo. Sono matematiche.»



Il volo dello sparviero



Il volo dello sparviero

- Uno sparviero, appollaiato su di un ramo di un alto albero, deve raggiungere il proprio nido che si trova in cima alla torre del castello.
- Lo sparviero, si lancia dall'albero sfiora il terreno e poi raggiunge la cima della torre.
- Alcuni studiosi hanno notato che il percorso dello sparviero, fra tutti i possibili, è quello più breve.
- Come possiamo determinare questo percorso?
- Costruzione grafica del problema: `sparviero.ggb`



Il volo dello sparviero

- Uno sparviero, appollaiato su di un ramo di un alto albero, deve raggiungere il proprio nido che si trova in cima alla torre del castello.
- Lo sparviero, si lancia dall'albero sfiora il terreno e poi raggiunge la cima della torre.
- Alcuni studiosi hanno notato che il percorso dello sparviero, fra tutti i possibili, è quello più breve.
- Come possiamo determinare questo percorso?
- Costruzione grafica del problema: `sparviero.ggb`



Il volo dello sparviero

- Uno sparviero, appollaiato su di un ramo di un alto albero, deve raggiungere il proprio nido che si trova in cima alla torre del castello.
- Lo sparviero, si lancia dall'albero sfiora il terreno e poi raggiunge la cima della torre.
- Alcuni studiosi hanno notato che il percorso dello sparviero, fra tutti i possibili, è quello più breve.
- Come possiamo determinare questo percorso?
- Costruzione grafica del problema: `sparviero.ggb`



Il volo dello sparviero

- Uno sparviero, appollaiato su di un ramo di un alto albero, deve raggiungere il proprio nido che si trova in cima alla torre del castello.
- Lo sparviero, si lancia dall'albero sfiora il terreno e poi raggiunge la cima della torre.
- Alcuni studiosi hanno notato che il percorso dello sparviero, fra tutti i possibili, è quello più breve.
- Come possiamo determinare questo percorso?
- Costruzione grafica del problema: [sparviero.ggb](#)



Il volo dello sparviero

- Uno sparviero, appollaiato su di un ramo di un alto albero, deve raggiungere il proprio nido che si trova in cima alla torre del castello.
- Lo sparviero, si lancia dall'albero sfiora il terreno e poi raggiunge la cima della torre.
- Alcuni studiosi hanno notato che il percorso dello sparviero, fra tutti i possibili, è quello più breve.
- Come possiamo determinare questo percorso?
- Costruzione grafica del problema: `sparviero.ggb`



Triangoli "minimi" dentro triangoli

- Sia ABC un triangolo acutangolo
- Determinare il triangolo (HKL) i cui vertici giacciono sui lati di ABC
- in modo che HKL abbia **perimetro minimo**
- Soluzione: triorti.ggb



Triangoli "minimi" dentro triangoli

- Sia ABC un triangolo acutangolo
- Determinare il triangolo (HKL) i cui vertici giacciono sui lati di ABC
 - in modo che HKL abbia **perimetro minimo**
 - Soluzione: triorti.ggb



Triangoli "minimi" dentro triangoli

- Sia ABC un triangolo acutangolo
- Determinare il triangolo (HKL) i cui vertici giacciono sui lati di ABC
- in modo che HKL abbia **perimetro minimo**
- Soluzione: triorti.ggb



Triangoli "minimi" dentro triangoli

- Sia ABC un triangolo acutangolo
- Determinare il triangolo (HKL) i cui vertici giacciono sui lati di ABC
- in modo che HKL abbia **perimetro minimo**
- Soluzione: triorti.ggb



"Strano" biliardo

- Gigi e Toni giocano a biliardo.
- Il biliardo è triangolare con le tre sponde della stessa lunghezza e una buca in ciascun angolo.
- si gioca con una sola palla con le seguenti regole:
- si posiziona la palla **davanti ad una buca** e la si colpisce, in modo da farla rimbalzare **almeno due volte** contro una delle sponde, e farla, poi, terminare nella buca davanti a cui si era piazzata la palla.
- Qual è il minimo percorso con cui si può mandare la palla correttamente in buca?
- Figura: pres-biliardo.ggb, Soluzione: biliardo.ggb



"Strano" biliardo

- Gigi e Toni giocano a biliardo.
- Il biliardo è triangolare con le tre sponde della stessa lunghezza e una buca in ciascun angolo.
- si gioca con una sola palla con le seguenti regole:
- si posiziona la palla **davanti ad una buca** e la si colpisce, in modo da farla rimbalzare **almeno due volte** contro una delle sponde, e farla, poi, terminare nella buca davanti a cui si era piazzata la palla.
- Qual è il minimo percorso con cui si può mandare la palla correttamente in buca?
- Figura: pres-biliardo.ggb, Soluzione: biliardo.ggb



"Strano" biliardo

- Gigi e Toni giocano a biliardo.
- Il biliardo è triangolare con le tre sponde della stessa lunghezza e una buca in ciascun angolo.
- si gioca con una sola palla con le seguenti regole:
 - si posiziona la palla **davanti ad una buca** e la si colpisce, in modo da farla rimbalzare **almeno due volte** contro una delle sponde, e farla, poi, terminare nella buca davanti a cui si era piazzata la palla.
 - Qual è il minimo percorso con cui si può mandare la palla correttamente in buca?
 - Figura: pres-biliardo.ggb, Soluzione: biliardo.ggb



"Strano" biliardo

- Gigi e Toni giocano a biliardo.
- Il biliardo è triangolare con le tre sponde della stessa lunghezza e una buca in ciascun angolo.
- si gioca con una sola palla con le seguenti regole:
- si posiziona la palla **davanti ad una buca** e la si colpisce, in modo da farla rimbalzare **almeno due volte** contro una delle sponde, e farla, poi, terminare nella buca davanti a cui si era piazzata la palla.
- Qual è il minimo percorso con cui si può mandare la palla correttamente in buca?
- Figura: pres-biliardo.ggb, Soluzione: biliardo.ggb



"Strano" biliardo

- Gigi e Toni giocano a biliardo.
- Il biliardo è triangolare con le tre sponde della stessa lunghezza e una buca in ciascun angolo.
- si gioca con una sola palla con le seguenti regole:
- si posiziona la palla **davanti ad una buca** e la si colpisce, in modo da farla rimbalzare **almeno due volte** contro una delle sponde, e farla, poi, terminare nella buca davanti a cui si era piazzata la palla.
- Qual è il minimo percorso con cui si può mandare la palla correttamente in buca?

■ Figura: [pres-biliardo.ggb](#), Soluzione: [biliardo.ggb](#)



"Strano" biliardo

- Gigi e Toni giocano a biliardo.
- Il biliardo è triangolare con le tre sponde della stessa lunghezza e una buca in ciascun angolo.
- si gioca con una sola palla con le seguenti regole:
- si posiziona la palla **davanti ad una buca** e la si colpisce, in modo da farla rimbalzare **almeno due volte** contro una delle sponde, e farla, poi, terminare nella buca davanti a cui si era piazzata la palla.
- Qual è il minimo percorso con cui si può mandare la palla correttamente in buca?
- Figura: pres-biliardo.ggb, Soluzione: biliardo.ggb



└ Non solo triangoli

└ "Rettangolo" di area massima

"Rettangolo" di area massima

- Fra tutti i rettangoli di fissato perimetro.
- Determinare **quello** di area massima.



└ Non solo triangoli

└ "Rettangolo" di area massima

"Rettangolo" di area massima

- Fra tutti i rettangoli di fissato perimetro.
- Determinare **quello** di area massima.



└ Non solo triangoli

└ "Rettangolo" di area massima

Coppia di numeri

Ovvero: trovare due numeri x e y di fissata somma $x + y = k$, il cui prodotto xy è massimo



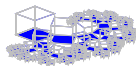
Soluzione algebrica

- Consideriamo la seguente uguaglianza:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

- xy è massimo quando $(x - y)^2$ è minimo ma dato che $(x - y)^2 \geq 0$ si ha:

$$x = y$$



Soluzione algebrica

- Consideriamo la seguente uguaglianza:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

- xy è massimo quando $(x - y)^2$ è minimo ma dato che $(x - y)^2 \geq 0$ si ha:

$$x = y$$



Ritorno alla geometria ...

- I rettangoli hanno le misure dei lati (*non servirebbe dirlo*) positive e reali (cioè sono numeri reali non negativi).
- Figure: prodotto-max.ggb e prodotto-maxq.ggb
- Ogni numero reale non negativo $r \geq 0$ è il quadrato di un numero reale x

$$r = x^2$$

- se il nostro rettangolo ha dimensioni h e k tali che $h + k = p$ si può scrivere

$$x^2 + y^2 = p$$

dove $h = x^2$ e $k = y^2$



Ritorno alla geometria ...

- I rettangoli hanno le misure dei lati (*non servirebbe dirlo*) positive e reali (cioè sono numeri reali non negativi).
- Figure: prodotto-max.ggb e prodotto-maxq.ggb
- Ogni numero reale non negativo $r \geq 0$ è il quadrato di un numero reale x

$$r = x^2$$

- se il nostro rettangolo ha dimensioni h e k tali che $h + k = p$ si può scrivere

$$x^2 + y^2 = p$$

dove $h = x^2$ e $k = y^2$



Ritorno alla geometria ...

- I rettangoli hanno le misure dei lati (*non servirebbe dirlo*) positive e reali (cioè sono numeri reali non negativi).
- Figure: prodotto-max.ggb e prodotto-maxq.ggb
- Ogni numero reale non negativo $r \geq 0$ è il quadrato di un numero reale x

$$r = x^2$$

- se il nostro rettangolo ha dimensioni h e k tali che $h + k = p$ si può scrivere

$$x^2 + y^2 = p$$

dove $h = x^2$ e $k = y^2$



└ Non solo triangoli

└ "Rettangolo" di area massima

Generalizzazione del problema

- Dati $n \in \mathbb{N}$ numeri reali non negativi di fissata somma S , essi hanno prodotto massimo quando sono uguali fra loro.



Generalizzazione del problema

■ Idea di dimostrazione:

- sia $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$
- Il prodotto $x_1 x_2 \dots x_n$ *deve avere un massimo*,
- supponiamo che due elementi non siano fra loro uguali (x_i ed x_j)
- Sostituiamo ciascun valore con la semisomma dei due
 $\overline{x_i} = \frac{x_i + x_j}{2}$ e $\overline{x_j} = \frac{x_i + x_j}{2}$ si ha che:

$$x_i x_j < \overline{x_i} \overline{x_j} = \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2$$

$$\text{infatti: } \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2 = 2x_i x_j + \left(\frac{x_i^2}{4} + \frac{x_j^2}{4} \right) > x_i x_j$$



Generalizzazione del problema

- Idea di dimostrazione:
- sia $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$
- Il prodotto $x_1 x_2 \dots x_n$ *deve avere un massimo*,
- supponiamo che due elementi non siano fra loro uguali (x_i ed x_j)
- Sostituiamo ciascun valore con la semisomma dei due $\overline{x_i} = \frac{x_i + x_j}{2}$ e $\overline{x_j} = \frac{x_i + x_j}{2}$ si ha che:

$$x_i x_j < \overline{x_i} \overline{x_j} = \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2$$

$$\text{infatti: } \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2 = 2x_i x_j + \left(\frac{x_i^2}{4} + \frac{x_j^2}{4} \right) > x_i x_j$$



Generalizzazione del problema

- Idea di dimostrazione:
- sia $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$
- Il prodotto $x_1 x_2 \dots x_n$ *deve avere un massimo*,
- supponiamo che due elementi non siano fra loro uguali (x_i ed x_j)
- Sostituiamo ciascun valore con la semisomma dei due
 $\overline{x_i} = \frac{x_i + x_j}{2}$ e $\overline{x_j} = \frac{x_i + x_j}{2}$ si ha che:

$$x_i x_j < \overline{x_i} \overline{x_j} = \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2$$

$$\text{infatti: } \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2 = 2x_i x_j + \left(\frac{x_i^2}{4} + \frac{x_j^2}{4} \right) > x_i x_j$$



Generalizzazione del problema

- Idea di dimostrazione:
- sia $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$
- Il prodotto $x_1 x_2 \dots x_n$ *deve avere un massimo*,
- supponiamo che due elementi non siano fra loro uguali (x_i ed x_j)
- Sostituiamo ciascun valore con la semisomma dei due
 $\overline{x_i} = \frac{x_i + x_j}{2}$ e $\overline{x_j} = \frac{x_i + x_j}{2}$ si ha che:

$$x_i x_j < \overline{x_i} \overline{x_j} = \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2$$

$$\text{infatti: } \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2 = 2x_i x_j + \left(\frac{x_i^2}{4} + \frac{x_j^2}{4} \right) > x_i x_j$$



Generalizzazione del problema

- Idea di dimostrazione:
- sia $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$
- Il prodotto $x_1 x_2 \dots x_n$ *deve avere un massimo*,
- supponiamo che due elementi non siano fra loro uguali (x_i ed x_j)
- Sostituiamo ciascun valore con la semisomma dei due $\overline{x_i} = \frac{x_i + x_j}{2}$ e $\overline{x_j} = \frac{x_i + x_j}{2}$ si ha che:

$$x_i x_j < \overline{x_i} \overline{x_j} = \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2$$

$$\text{infatti: } \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^2 = 2x_i x_j + \left(\frac{x_i^2}{4} + \frac{x_j^2}{4} \right) > x_i x_j$$



- Sia ABC un generico triangolo.
- Determinare la posizione di un suo punto P in modo che il prodotto delle distanze di P dai lati risulti massimo.
- Idee di soluzione: `p_dist_max.ggb` e `prop_baricentro.ggb`








- Sia ABC un generico triangolo.
- Determinare la posizione di un suo punto P in modo che il prodotto delle distanze di P dai lati risulti massimo.
- Idee di soluzione: `p_dist_max.ggb` e `prop_baricentro.ggb`



- Sia ABC un generico triangolo.
- Determinare la posizione di un suo punto P in modo che il prodotto delle distanze di P dai lati risulti massimo.
- Idee di soluzione: `p_dist_max.ggb` e `prop_baricentro.ggb`



Bibliografia

-  AA. VV., *Questioni riguardanti le matematiche elementari (raccolte e curate da F. Enriquez)*, Zanichelli
-  L. Berzolari G. Vivanti e D. Gigli , *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, Pagine
-  L. Cateni R. Fortini C. Bernardi, *Il nuovo pensiero geometrico*, Le Monnier
-  Bottazzini Umberto, Freguglia Paolo e Toti Rigatelli Laura *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni
-  <http://www.geogebra.org/>

