

Progetto Olimpiadi della Matematica

VI Gara Nazionale per le Classi Prime

6 Febbraio 2018

Test n.1

Punteggi: Giusto=6, Non Fatto=1, Sbagliato=0

Quesito n. 1 Un piccolo pianeta ha la forma di ottaedro regolare col lato di 720 chilometri. L'unico abitante del pianeta si trova nel punto medio di uno degli spigoli e vuole recarsi nel punto medio dello spigolo diametralmente opposto a quello su cui si trova camminando sulla superficie del pianeta. Qual è il minimo numero di chilometri che deve percorrere?

- A 1080 B 960 C 900 D 1440 E 1200 F 720

Quesito n. 2 \mathcal{F} È dato un polinomio $p(x)$ del tipo:

$$p(x) = x^{10} + x^9 + \text{termini di grado inferiore.}$$

Qual è il grado di $(p(x))^2 - p(x^2)$?

- A 19 B 18 C nessuna delle altre risposte è esatta D 20 E non determinabile senza conoscere anche i termini di grado inferiore F 40

Quesito n. 3 Quanti sono i divisori positivi di 99^9 che sono dei quadrati o dei cubi perfetti?

- A 99 B 120 C 70 D 90 E 36 F 55

Quesito n. 4 Del polinomio $p(x)$ sappiamo che

$$(x^6 - 3x - 1) \cdot p(x) = x^{17} - x^{11} - 6x^7 - 4x^6 - 9x^2 + 1.$$

Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$?

- A -6 B 6 C 2 D -3 E 3 F -2

Quesito n. 5 \mathcal{F} Dati i 3 numeri $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt[3]{26}$ e $c = 2,9$ allora si ha:

- A $c < a < b$ B $b < c < a$ C $b < a < c$ D $a < b < c$ E $c < b < a$ F $a < c < b$

Quesito n. 6 \mathcal{F} Siano $p(x) = x^{20} + x^{19} + \dots + x^2 + x + 1$ e $q(x) = x^{10} + x^9 + \dots + x^2 + x + 1$. Qual è il termine di grado 6 di $p(x) \cdot q(x)$ dopo aver sommato tra loro tutti i termini simili?

- A $36x^6$ B $49x^6$ C $3x^6$ D $7x^6$ E $37x^6$ F $2x^6$

Quesito n. 7 \mathcal{F} L'espressione $\sqrt{4^{201} - 2^{401} - 2^{400}}$ vale:

- A nessuna delle altre risposte è esatta B 4^{101} C 2^{200} D 2^{100} E 4^{200} F 2^{20}

Quesito n. 8 Una retta taglia un rettangolo \mathcal{R} in 2 parti rettangolari di area 40 e 60. Tagliando ulteriormente \mathcal{R} lungo una sua diagonale si ottengono complessivamente 4 parti. Qual è l'area della parte più piccola?

- A 8 B 4 C 12 D 10 E i dati sono insufficienti perché la risposta dipende dalla forma del rettangolo F 20

Quesito n. 9 Si consideri il numero 201820172016...10987654321 ottenuto disponendo uno accanto all'altro, in ordine decrescente, tutti gli interi da 2018 ad 1. Che resto si ottiene dividendo tale numero per 6?

- A 1 B 4 C 0 D 5 E 3 F 2

Quesito n. 10 \mathcal{F} Partendo da un triangolo \mathcal{T}_0 costruisco il triangolo \mathcal{T}_1 che ha per vertici i punti medi dei lati di \mathcal{T}_0 . Allo stesso modo costruisco \mathcal{T}_2 a partire da \mathcal{T}_1 . Proseguo allo stesso modo fino ad arrivare a \mathcal{T}_6 . Se \mathcal{T}_6 ha area 1 cm^2 e indichiamo con s l'area di \mathcal{T}_0 espressa in cm^2 , allora:

- A $s \leq 40$ B $1000 < s \leq 5000$ C non determinabile univocamente dai soli dati forniti, in quanto dipende dalla forma del triangolo D $s > 5000$ E $40 < s \leq 200$ F $200 < s \leq 1000$

Quesito n. 11 Un piccolo verme entra in una grossa mela sferica dal raggio di 10 cm e ne esce dopo aver percorso al suo interno un tragitto (non necessariamente rettilineo) di lunghezza d . Trovare la minima lunghezza ℓ tale che, qualunque sia la forma del percorso del verme, se $d < \ell$ si riesce comunque a tagliare la mela (con un taglio piano) in due parti uguali, delle quali una è completamente sana.

- A $\ell = \frac{20\pi}{3}$ cm B $\ell = 5\pi$ cm C $\ell = 10$ cm D $\ell = \frac{10\pi}{3}$ cm E $\ell = 10\pi$ cm F $\ell = 20$ cm

Quesito n. 12 Un quadrato di cartoncino di area 36 cm^2 viene tagliato con le forbici in 6 pezzi. Sappiamo che ciascuno dei 6 pezzi ha la forma di un quadrato. Qual è, espressa in cm^2 , l'area del pezzo che ha area massima?

- A 18 B 16 C 31 D è impossibile che tutti e 6 i pezzi siano dei quadrati E le informazioni sono insufficienti perché esistono più modi di suddividere il quadrato assegnato in 6 quadrati F 12

Quesito n. 13 Dato un quadrato $ABCD$ di area 1600, si consideri la circonferenza passante per i punti C e D e tangente al lato AB . Qual è il suo diametro?

- A 42 B 49 C 60 D 44 E 50 F 48

Quesito n. 14 Tra tutte le possibili liste di 10 numeri che posso ottenere scrivendo, in ordine qualsiasi, tutti i numeri da 1 a 10, quante sono quelle nelle quali la somma dei numeri che occupano le posizioni pari è uguale alla somma di quelli che occupano le posizioni dispari?

- A 14400 B 2 C 10 D 120 E 0 F 28800

Quesito n. 15 \mathcal{F} Sull'isola *Kenoncè* si sta diffondendo rapidamente un'epidemia di influenza: ogni 24 giorni il numero di malati si ottuplica. Se il 6 febbraio 2018 i malati sono 200000, in quale data erano stati 100000?

- A 2 febbraio B 17 gennaio C 27 gennaio D 25 gennaio E 31 gennaio F 29 gennaio

Quesito n. 16 \mathcal{F} Per la gita scolastica la classe $2^a D$ noleggia un autobus. Il prezzo complessivo dell'autobus è fisso e non dipende dal numero di partecipanti. I ragazzi decidono di dividere la spesa in parti uguali tra tutti gli alunni della classe. Tuttavia, al momento di dare l'adesione, due ragazzi si ritirano e questo fa aumentare il prezzo pro capite dell'8%, rispetto a quello che sarebbe stato se fossero andati tutti. Quanti sono in tutto gli alunni della $2^a D$?

- A 24 B 27 C più di 27 D 25 E meno di 24 F 26

Quesito n. 17 \mathcal{F} L'alfabeto marziano è composto solo da 3 lettere e le parole sono lunghe al massimo 5 lettere (che possono essere anche tutte uguali). Quante sono al massimo le parole dei Marziani?

- A 150 B 381 C 363 D 125 E 315 F 151

Quesito n. 18 Luca e Claudia devono dividersi una tavoletta rettangolare di cioccolato composta da 7 righe di 12 quadretti ciascuna. A turno ciascuno dei due spezza ciò che rimane della tavoletta in due parti, con un taglio orizzontale o verticale che lascia intatto ogni singolo quadretto, mangia una delle due parti e restituisce all'avversario l'altra. Perde chi riceve dall'avversario un pezzo di un solo quadretto. Se inizia Claudia, quanti quadretti deve mangiare con la prima mossa per essere sicura che, comunque risponda Luca, sarà lei a vincere?

- A 63 B 48 C 35 D Claudia può vincere in più modi, mangiando diverse quantità di quadretti E 42 F qualunque cosa Claudia faccia, sarà Luca a vincere

Test n.1 Cognome: Nome:

n.1	n.2	n.3	n.4	n.5	n.6	n.7	n.8	n.9	n.10	n.11	n.12	n.13	n.14	n.15	n.16	n.17	n.18
<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> A
<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> B
<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> C
<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> D
<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> E
<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> F

La gara dura 2 ore e 30 minuti. Non è ammesso l'uso di cellulare, calcolatrici, righelli, compasso e goniometro. Ricorda che i problemi non sono in ordine di difficoltà, ma permutati in modo casuale. Per darti qualche indicazione sulla loro difficoltà abbiamo contrassegnato quelli che ci sembravano più semplici con il simbolo: \mathcal{F} .