

Problemi

Problema 1. Sia $f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{e^x + 1}$:

a) studia la funzione;

b) dopo aver ricavato che $f''(x) = \frac{(e^{3x} + 3e^{2x} + 5e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^3}$, utilizzando il teorema di Rolle, dimostra che la funzione f ha un solo flesso.⁽¹⁾

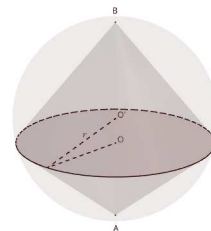
Quesiti

Quesito 1. Una piramide regolare quadrangolare $VABCD$ ha lo spigolo di base di 6 m e l'altezza di 4 m. La sezione della piramide con un piano parallelo alla base è il quadrato $EFGH$, la cui proiezione sul piano di base della piramide è $E'F'G'H'$. Determina la distanza di tale piano dal vertice della piramide in modo che l'area della superficie laterale della prisma $EFGHE'F'G'H'$ sia massima.

Quesito 2. Considera il diametro AB di una sfera di raggio r e un centro O' sia $O \in O'A$. Taglia la sfera con un piano perpendicolare in O ad AB in modo che la differenza dei volumi dei due coni^(a), aventi per base il cerchio sezione e per vertici i punti A e B , sia massima.

Determina la distanza AO .

^aIl cono di vertice B meno il cono di vertice A



Quesito 3. Calcola il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log_2 x$$

e poi dimostra il teorema de L'Hôpital.

Quesito 4. Determina i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \alpha x^2 + (x^3 + 3x) \arctg(x) - \log(1 + x^2)$$

risulti convessa in tutto il dominio.

Quesito 5. La trasmissione di un segnale può avvenire utilizzando due diversi canali A e B, A trasmette il 35% dei segnali mentre B il restante 65%. A trasmette sempre segnali corretti, B, invece, trasmette il segnale correttamente con probabilità $\frac{4}{5}$.

a) Qual è la probabilità che venga trasmesso un segnale corretto;

b) Se viene inviato un segnale corretto qual è la probabilità che sia stato inviato da B?

Quesito 6. Una sfera, il cui centro è il punto $K = (-2, -1, 2)$, è tangente al piano π avente equazione: $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

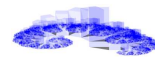
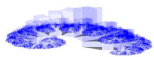
1 Quesiti “sostitutivi”

- Puoi sostituire con il quesito corrispondente

Quesito 6. I punti $A = (3, 4, 1)$, $B = (6, 3, 2)$, $C = (3, 0, 3)$, $D = (0, 1, 2)$ sono vertici di un quadrilatero $ABCD$. Si dimostra che tale quadrilatero è un parallelogramma e controlla se è un rettangolo.

- Puoi sostituire uno qualunque dei quesiti 1-2-3-4-5 con quelli qui sotto riportati.

¹È chiaro che la richiesta può essere risolta con l'uso della calcolatrice, che risolve le equazioni di III grado, ma qui si chiede di utilizzare il teorema di Rolle o eventualmente proprietà delle cubiche.



Quesito 100. Dopo aver ricavato che $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, dimostra che $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$

Quesito 101. Un dado a forma di tetraedro viene fatto rotolare⁽²⁾, sapendo che inizialmente la faccia nascosta (base) è 3 qual è la probabilità che dopo n rotolamenti si trovi nuovamente con la faccia nascosta 3.

2 Questo è un

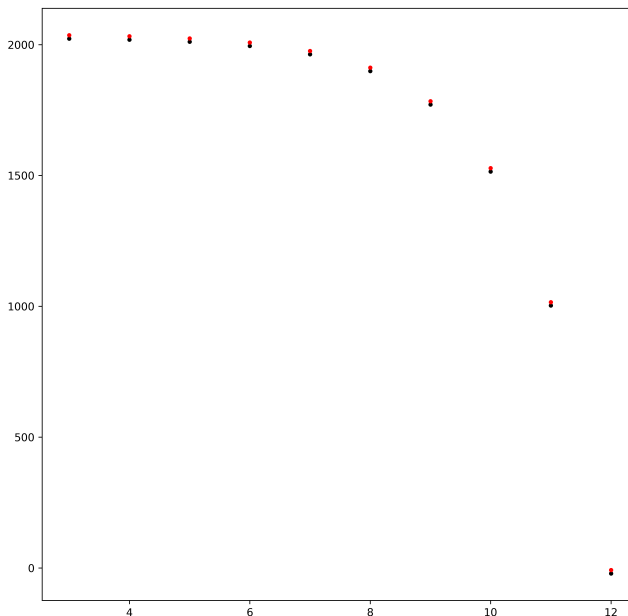


?... ma
anche no!

Quesito 2026. Sia a_n la successione così definita $\forall n \geq 1$:

$$\begin{cases} a_1 = 2026 \\ a_2 = 2025 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \end{cases}$$

Determina $2a_{2025} - a_{2026}$.



3 Mate problema

Problema 1. Sia data la famiglia di funzioni reali di variabile reale:

$$f_n(x) = x^n e^{-x^2} \quad n \in \mathbb{N}$$

- i) discuti, nel caso n pari ed n dispari, il tipo di simmetria della funzione.
- ii) studia la funzione nel caso $n = 3$

4 Fis problema

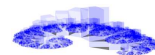
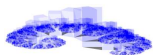
Problema 2. Una spira rettangolare di lati $a = 15 \text{ cm}$ e $b = 20 \text{ cm}$, rispettivamente paralleli all'asse delle x e all'asse delle y , resistenza $R = 25 \Omega$ e massa $m = 4.0 \text{ g}$ scivola senza attrito sul piano xy . Al tempo $t = t_0 = 0$ la spira ha velocità $v_x(t_0) = v_0 = 4.0 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ed entra nel semipiano $x > 0$ dove è presente un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = 0.50\vec{k} \text{ T}$. Determina:

- 1) l'accelerazione a cui è soggetta la spira;
- 2) la legge $v(t)$ (velocità con cui si muove la spira nel tempo).

5 Quesiti: tre a scelta di cui almeno uno di Fis

Quesito 1 (Mate). Una somma di $P \text{ €}$ è depositata in una banca che paga un interesse al tasso annuale r , calcolato m volte all'anno. (Per esempio $r = 0,06$ quando il tasso annuale è del 6%.)

²un rotolamento consiste nel passaggio da una faccia (ad esempio 1) ad una qualsiasi delle altre tre facce (2,3,4)



Dimostra che la somma totale del capitale più l'interesse alla fine di n anni è $P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$. Se r ed n sono fissi, questa somma tende al limite Pe^{rn} per $m \rightarrow +\infty$. Ciò motiva la seguente definizione: diciamo che il denaro aumenta di un tasso annuale r quando questo è calcolato continuamente se la somma $f(t)$ dopo t anni è $f(0)e^{rt}$, dove r è un numero reale non negativo.

Approssimativamente quanto tempo ci vuole perché un conto in banca, depositato al tasso d'interesse del 6% annuo, raddoppi, se l'interesse è calcolato continuamente?

Quesito 2 ($\mathcal{F}is$). In un circuito LCR nell'istante $t = 0$ nel condensatore è depositata la carica q_0 , affinché il circuito oscilli in modo smorzato (vedi figure 1) come devono essere scelti i componenti L , C , ed R ? Motiva la risposta.

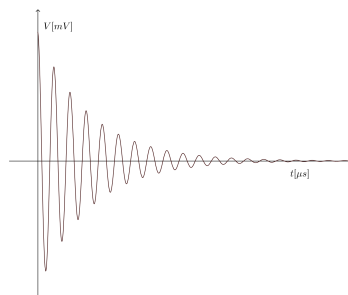


Figura 1

Quesito 3 ($\mathcal{M}ate$). Determina il tronco di cono, inscritto in una semisfera di raggio R , di superficie laterale massima.

Quesito 4 ($\mathcal{F}is$). Come è stata ricavata la IV legge di Maxwell $\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d \left(\Phi \left(\vec{E} \right) \right)}{dt}$

Quesito 5 ($\mathcal{M}ate$). Sia Γ_0 una sfera tangente al piano $\pi : x + y + z = 2$ di raggio $R = 2\sqrt{3}$ avente il centro C sulla retta $r : P = (1, 0, 1) + t(1, 1, 0)$.

Calcola:

- l'equazione delle superfici sferiche Γ_i ;
- le coordinate dei punti T_i in cui le Γ_i sono tangenti a π .

Quesito 6 ($\mathcal{M}ate$). In un contenitore ci sono 20 dadi (a sei facce) di cui il 40% regolari mentre i restanti presentano 4 facce con un solo punto e 2 con sei punti. Estraggo due dadi li lancio:

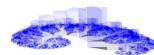
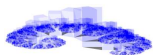
- qual è la probabilità di ottenere una coppia di sei?
- Sapendo che ho ottenuto una coppia di sei qual è la probabilità che i dadi siano uno regolare e l'altro non regolare?

6 $\mathcal{M}ate$ problema

Problema 1. Sia data la famiglia di funzioni reali di variabile reale:

$$f_k(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + k}$$

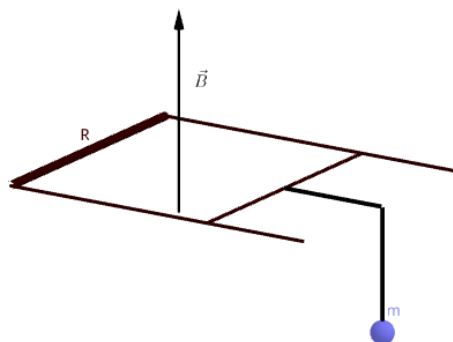
- determina per quali valori di k il dominio coincide con $\mathbb{R}$;
- dopo aver verificato che tutte le f_k passano per $A = (-2, 0)$ e $O = (0, 0)$, studia la funzione nel caso $k = 1$



7 $\mathcal{F}$ is problema

Problema 2. Una spira rettangolare piana di resistenza complessiva $R = 3.0 \, \Omega$ ha un lato mobile di lunghezza $\ell = 13 \, \text{cm}$ e massa $M = 180 \, \text{g}$. La spira è attraversata in direzione normale da un campo di induzione magnetica di intensità $B = 1.0 \, \text{T}$. Al lato mobile è appeso un grave di massa $m = 20 \, \text{g}$. Trascurando gli attriti meccanici e l'autoinduzione, calcola:

- 1) l'intensità della corrente indotta;
- 2) l'accelerazione a cui è sottoposto il lato mobile della spira.



8 Quesiti: tre a scelta di cui almeno uno di $\mathcal{F}$ is

Quesito 1 ($\mathcal{M}$ ate). Si stima che il 45% delle email siano spam. Alcuni software sono stati utilizzati per filtrare queste email di spam prima che raggiungano la tua casella di posta. Il software A afferma di poter rilevare il 99% delle email di spam ma al 5% rileva email non spam come spam.

Se un'email viene rilevata come spam, qual è la probabilità che in realtà non lo sia?

Quesito 2 ($\mathcal{F}$ is). Spiega come abbiamo ricavato la relazione $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

Quesito 3 ($\mathcal{M}$ ate). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile con continuità e siano $f(2) = 1$, $f'(2) = 4$. spiega perché f è invertibile in un intorno di $x = 2$ e calcola $(f^{-1})'(1)$. ⁽¹⁾

Quesito 4 ($\mathcal{F}$ is). Quali sono i due tipi di esperimenti in cui si osserva il fenomeno dell'induzione elettromagnetica? Quali sono i meccanismi fisici che causano la f.e.m. indotta nei due casi?

Quesito 5 ($\mathcal{M}$ ate). Data la famiglia di funzioni $g_k(x) = -x^3 + 6kx + 33$, determina il valore $\tilde{k}$ per cui $g_{\tilde{k}}$ ha come tangente nel punto di ascissa 3 la retta parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Ricava, poi, l'equazione della tangente.

Quesito 6 ($\mathcal{M}$ ate). È dato un triangolo ABC con $BC = 2AB$. Indica con D il punto medio di BC e con E il punto medio di BD . Dimostra che AD biseca $\widehat{CAE}$.

Quesito 7 ($\mathcal{F}$ is). Determina l'espressione dell'induttanza L di un solenoide ideale.

Ricava che la densità di energia magnetica è $u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$.

Quesito 8 ($\mathcal{M}$ ate). Determina per quali valori del parametro reale h le rette

$$r : \begin{cases} x - 2hy + 3z = 0 \\ hx + y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + hy = 2 \\ y - hz = 0 \end{cases}$$

sono parallele, incidenti o sghembe.

¹ f^{-1} è la funzione inversa di f