

1 $\mathcal{M}ate^{\mathcal{M}ate}$ obbligatorio

1.1 Disequazioni

Problema 1. a) $\frac{x^2 - x}{x^4 - x^2 + 1} \leq 0;$

c) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) > \sqrt{3};$

b) $\log_2(x-3) + \log_2(x+3) \geq 1;$

d) $2^{6x} - 3 \cdot 2^{3x} - 4 \leq 0;$

Quesito 1. Determina per ciascuno dei seguenti polinomi l'insieme dei numeri complessi z per i quali il polinomio ha valore reale

a) $z^4 + iz^2.$

b) $\frac{z}{z+i};$

c) $z + \frac{1}{z}.$

Quesito 2. Considera la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, determina le equazioni delle rette tangenti alla parabola nel punto di ascissa 2 e nel suo simmetrico rispetto all'asse di simmetria della parabola.

Quesito 3. Lanciando una coppia di dadi cinque volte qual è la probabilità che si ottenga un punteggio totale maggiore di sette almeno due volte?

2 $\mathcal{F}is^{\mathcal{F}is}$ obbligatorio

Problema 2. Una massa m , che si muove su un piano liscio orizzontale, è soggetta ad una forza costante per t s ⁽¹⁾, al termine dell'accelerazione sale lungo un piano inclinato (inclinazione $\alpha = \frac{\pi}{4}$). Calcola:

1) il lavoro svolto dalla forza;

2) a che altezza si ferma la massa (piano liscio)

3) a che altezza si ferma la massa (piano scabro coefficiente di attrito μ)

Quesito 4. Un oggetto viene lanciato verso l'alto; supponendo che $h(t) = 40t - 2t^2$ sia la legge oraria del suo moto espressa in metri, determina la funzione velocità e la quota massima raggiunta dall'oggetto.

Problema 3. n moli di gas perfetto, alla pressione p_1 e temperatura T_1 , sono compresse isotermicamente fino a raggiungere la pressione p_2 . Determina la quantità di calore scambiata nella trasformazione.

3 Di tutto un po': a scelta almeno 3 problemi

Problema 4. Disegna il grafico probabile della seguente funzione:

a) $f(x) = \log(e^{2x} + 1)$

Problema 5. Una pallina viene depositata su di un disco in quiete. La pallina si muove a velocità costante $\vec{v}$. Calcola la velocità angolare del sistema disco pallina dopo che la pallina è stata depositata. Se la pallina è di naftalina (^a) e quindi sublima rapidamente, calcola dopo la sublimazione la velocità angolare del disco.

massa pallina

m

massa disco

M

raggio disco

R

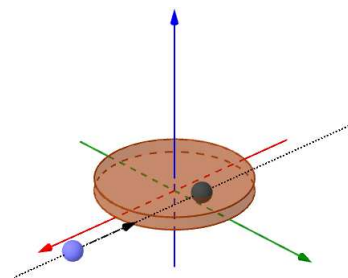
momento di inerzia disco

MR^2

distanza punto di appoggio massa con asse di rotazione

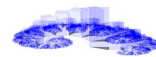
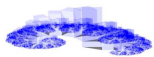
$\frac{2}{r}$

^a $C_{10}H_8$



Problema 6. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad un cerchio di raggio R . Determina le basi del trapezio sapendo che il perimetro di questo misura $9R$.

¹s indica secondi



Quesito 2. Dimostra, usando il principio di induzione, che:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \text{ è vera per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quesito 3. In figura 2 è rappresentato lo sviluppo di un poliedro le cui facce sono tutte triangoli equilateri:

- spiega perché non è un poliedro regolare;
- calcola l'angolo che il piano della faccia ABV_1 forma con il piano della faccia ABV_2
- se lo spigolo misura 2, quanto vale il volume del solido?

Quesito 4. Uno studente deve sostenere un esame. Se studia passa con probabilità 99 %, ma se va alla festa da ballo la sera prima la sua probabilità di promozione si riduce al 50 %. Deciderà di andare alla festa se esce testa lanciando una moneta equa. Se egli supera l'esame qual è la probabilità che sia andato a ballare?

Quesito 5. Dimostra che non esiste un poliedro con sette spigoli.^(a)

^aNoto che $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$

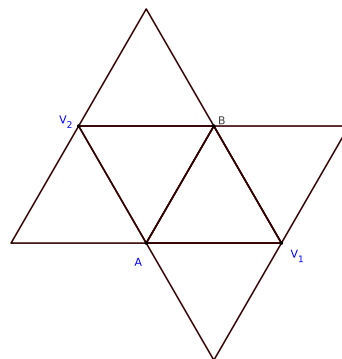


Figura 2: Poliedro non regolare

5.1 In alternativa

Nuovi quesiti 2 e 5 :

Quesito 2. Calcola i seguenti limiti:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[12]{x^{11} + x^{24}}}{4x - 7x^2}; \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 4} - x + 3; \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 4} - x + 3.$$

Quesito 5. Dimostra che la funzione $f(x) = 3 - x^2$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

6 Un po' di limiti per iniziare

Problema 1. Calcola, se esistono, i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}; & 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x}; \\ 2) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}; & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\log(2x + 1)}. \end{array}$$

7 Ora una funzioncina

Problema 2. Studia la funzione: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

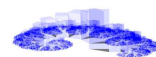
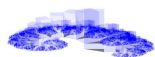
8 Geo3D

Problema 3. Data la circonferenza di equazione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases}$$

calcola:

- la distanza fra il centro della circonferenza e il centro della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$;
- l'equazione parametrica della retta tangente alla circonferenza nel punto di coordinate $(0, 0, -2)$.



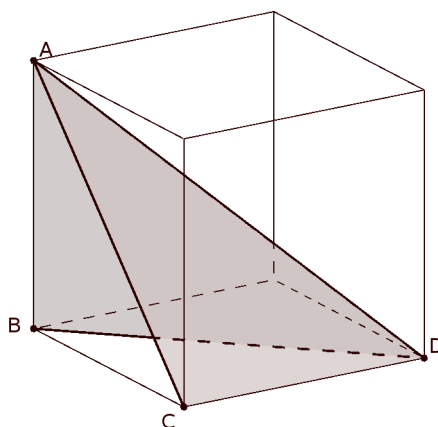
9 Quesiti non solo teoria

Quesito 1. Dopo aver enunciato e dimostrato il teorema del confronto (due carabinieri), riporta una sua applicazione.

Quesito 2. Data la funzione: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1} & \text{se } x \neq 0 \\ 2025 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ spiega perché la funzione non è continua in $x = 0$ ma ammette limite per $x \rightarrow 0$.

10 Geometria nello spazio

Problema 4. AB, BC, CD sono tre spigoli di un cubo di diagonale AD . Ricava che l'angolo diedro delimitato dai piani ABD e ACD misura $\frac{\pi}{3}$.



Quesito 1. Dimostra che il campo elettrico $\vec{E}$, generato da una lastra conduttrice carica, è uniforme.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 2. Può una carica q rimanere sospesa all'interno di un condensatore carico? Motiva la risposta.

.....

.....

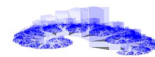
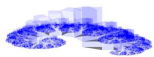
.....

.....

.....

.....

.....



Quesito 3. Ricava la capacità di un condensatore piano.

.....

.....

.....

.....

.....

Problema 1. Sui vertici di un tetraedro regolare, di spigolo ℓ metri, sono posizionate quattro cariche positive aventi la stessa intensità q misurata in Coulomb.

Calcola il vettore campo elettrico $\vec{E}$ nel punto P che si trova nel semispazio che non contiene il tetraedro, appartiene alla retta perpendicolare al piano contenente una faccia del tetraedro, passante per il baricentro della faccia, ad una distanza d metri dal baricentro. (figura 3)

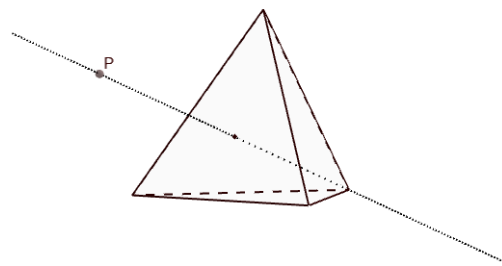


Figura 3: Tetraedro con cariche

Problema 1. Data la funzione $f(x) = \log(e^{-x} + 1)$:

- 1) studia f e costruisci il suo grafico $\mathcal{G}_f$;
- 2) dimostra che f è invertibile nel dominio di definizione;
- 3) ricava che il grafico $\mathcal{G}_g$ della funzione $g(x) = -\log(e^x - 1)$ è, nello stesso riferimento xOy , quello della funzione inversa di f ;
- 4) dimostra che la bisettrice del II e IV quadrante ($y = -x$) è l'asintoto obliquo della funzione f ;
- 5) ricava che $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ si intersecano in A la cui ascissa è $\log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

Problema 2. Fra tutti i prismi esagonali regolari inscritti nella medesima sfera di raggio di misura r , qual è quello di volume massimo?

Quesito 1. Dimostra che se una funzione ha derivata sempre nulla è costante.

Quesito 2. Dimostra che la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ammette un solo zero. (*)

Quesito 3. Sia

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}}_a + \underbrace{\frac{e^\xi x^4}{4!}}_b \quad (1)$$

i) come sono definiti a e b ?

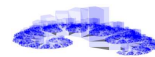
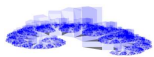
ii) se per calcolare $\sqrt[3]{e}$ utilizzo la (2) che errore commetto? (Spiega i calcoli)

Quesito 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$$

Dimostra che esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_0) = 0$.

* $\exists! \xi : f(\xi) = 0$



Problema 3. Data la funzione $k(x) = e^x - 2(x + 1)$:

- 1) dimostra che esistono $\alpha \in [-1, 0]$ e $\beta \in [1, 2]$ tali che $k(\alpha) = k(\beta) = 0$;
- 2) dimostra che α e β sono gli unici zeri della funzione k ;
- 3) stima α a meno di $\frac{1}{100}$.

Problema 1. Nella figura è riportata un'istantanea scattata in una camera a bolle. L'apparecchiatura, come

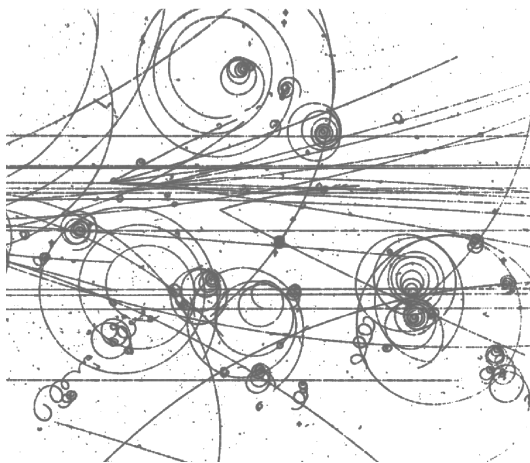


Figura 4: Camera a bolle fonte CERN

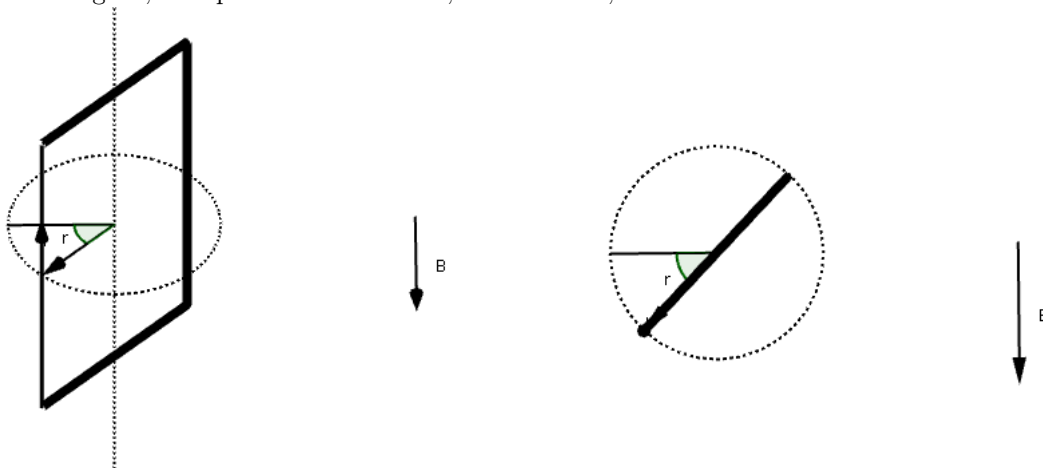
è noto, permette di visualizzare le tracce di particelle che attraversano la camera che è immersa in un campo di induzione magnetico $\vec{B}$. Supponi che il campo $\vec{B}$ sia uniforme e orientato perpendicolarmente alla camera con verso uscente.

- i) Descrivi le forze agenti sulle particelle che attraversano la camera a bolle;
- ii) analizza alcune traiettorie rappresentate, facendo le opportune ipotesi sulla natura delle particelle che hanno generato la traccia.

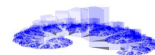
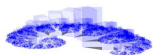
Un pione π^- (*) entra con velocità $v = 0.3c$ nella camera a bolle, nell'ipotesi che $|\vec{B}| = 2.0T$:

- i) calcola la legge oraria del moto e ricava l'equazione della traiettoria.

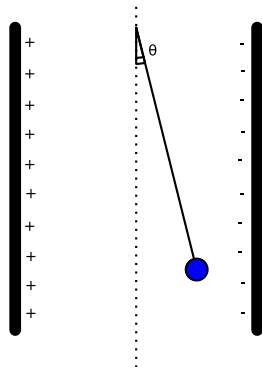
Problema 2. Dopo aver spiegato come si ricava $\vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$, calcola il momento delle forze che agiscono sulla spira quadrata di figura, nell'ipotesi che $i = 2.0 A$, $B = 0.025 T$, $r = 10 cm$.



*massa $139.6 \frac{MeV}{c^2}$



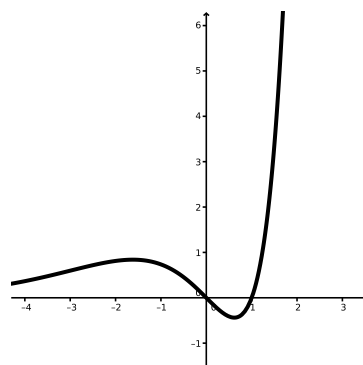
Problema 3. In figura è rappresentato un condensatore piano le cui armature rettangolari hanno, ciascuna, dimensioni 50 cm e 20 cm e sono poste ad una distanza di 10 cm .



- 1) Calcola la capacità del condensatore;
- 2) sapendo che la massa è in equilibrio calcola il segno e la quantità di carica su di essa presente nell'ipotesi che $m = 20\text{ g}$, $\ell = 30\text{ cm}$, $\theta = 6^\circ$ e che hai capi del condensatore è applicata una differenza di potenziale di 25 V .

Problema 4. Dopo aver studiato la funzione $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^2}$, costruisci, motivando con cura i passaggi, la funzione $g(x) = e^{f(x)}$

Problema 5. In figura è riportato il grafico $\mathcal{G}_k$ di una funzione $k(x)$. Proponi una possibile legge per k motivando con cura le scelte.



Quesito 1.

calcola la derivata nello 0 della funzione $t(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Quesito 2. Ricava, utilizzando il teorema della derivata della funzione inversa, $h'(x)$ dove $h(x) = \arcsin(x)$.

Quesito 3. Sia $\mathcal{I}$ l'icosaedro di lato 2, in un opportuno riferimento cartesiano $Oxyz$ le coordinate dei suoi punti si possono così scrivere: $I_{1,2} = \left(1, 0, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $I_{3,4} = \left(-1, 0, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

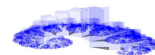
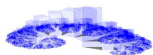
$$I_{5,6} = \left(\pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, 0\right), I_{7,8} = \left(\pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1, 0\right)$$

$$I_{9,10} = \left(0, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right), I_{11,12} = \left(0, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right)$$

Sai spiegare come sono state ricavate?

Quesito 4. In quanti modi si può colorare un dodecaedro utilizzando 12 colori?

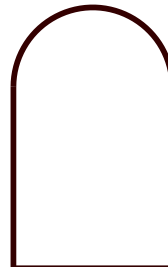
Problema 6. L'interno di un serbatoio, (capacità 32 litri) senza coperchio e dal fondo quadrato, deve essere rivestito di resina sintetica. Quali devono essere le sue dimensioni affinché la quantità di resina utilizzata sia minima?



11 Mateprob

Problema 1. Studia la funzione $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{e^{2x}}$. Sia $\mathcal{G}_f$, il suo grafico, calcola l'equazione della tangente a $\mathcal{G}_f$ nel punto in cui la curva interseca l'asse delle ordinate.

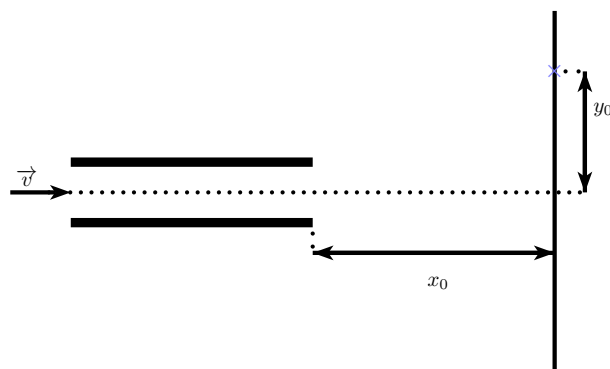
Problema 2. Si vuole costruire una finestra rettangolare sormontata da un semicerchio, quali sono le dimensioni della finestra che permettono, a parità di luce (superficie), il minor costo per il telaio (perimetro minimo).



12 Fisprob

Problema 3. Un elettrone in moto rettilineo uniforme con velocità $v = 20 \frac{km}{s}$ attraversa una regione dello spazio dove è presente un campo magnetico $\vec{B}$, $|\vec{B}| = 11 \cdot 10^{-4} T$ perpendicolare alla traiettoria iniziale dell'elettrone. Determinare il raggio, il periodo e la frequenza del moto circolare che la particella stabilisce.

Problema 4. Un pione π^- (^a) viene iniettato con velocità v , nel condensatore in figura, le cui armature sono quadrate di lato ℓ e poste ad una distanza d . Noti $|\vec{v}|$, x_0 ed y_0 ,



- indica l'armatura positiva;
- calcola l'intensità del campo elettrico fra le armature del condensatore.

^aIn fisica delle particelle il pione, o mesone Pi, è la particella mediatrice dell'interazione forte fra nucleoni. È il più leggero tra i mesoni ed esiste in tre stati: π^- , π^+ , π^0 . Fu il primo mesone ad essere teorizzato nel 1935 da Hideki Yukawa e rilevato nel 1947 nei raggi cosmici; ha carica elettrica: $\pm e$ e massa $139.6 \frac{MeV}{c^2}$

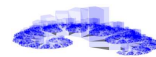
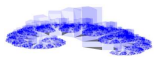
13 Quesiti MateFis

13.1 Uno a scelta

Quesito 1. Siano $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (0, 0, -1)$ tre punti dello spazio $\mathcal{S}$ in cui è definito un sistema ortonormale $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

- calcola l'equazione del piano $\pi = ABC$;
- calcola il baricentro del triangolo ABC ;
- scrivi l'equazione parametrica e algebrica della retta perpendicolare a π in A ;

Quesito 2. Data la funzione: $j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ calcola, se esiste la derivata prima di j in $x = 0$.



13.2 Uno a scelta

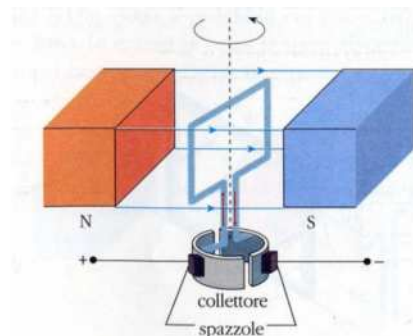
Quesito 3. Il tema dell'esame di stato prevede 2 problemi e 8 quesiti, il candidato deve svolgere 1 problema e 4 quesiti.

- Quanti sono i possibili compiti diversi?
- In pratica però il candidato deve svolgere al più un problema e al più cinque quesiti. In questa ipotesi quanti sono i compiti diversi?

Quesito 4. Siano $A = (2, 1, 0)$, $B = (1, -1, 3)$, $C = (2, 2, 3)$ e $D = (-8, 2, 2)$ i vertici di un tetraedro, calcola il volume.

13.3 Uno a scelta

Quesito 5. Spiega cosa accade alla spira riportata in figura. La spira rettangolare ha dimensioni a b ed è percorsa da una corrente i , ed immersa in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ uniforme.



Quesito 6. Spiega come, grazie agli esperimenti di J.J. Thomson e R. Millikan si è riusciti a determinare la massa e la carica dell'elettrone

14 Mate prob

Problema 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione la cui legge è $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$. Ricava che:

- la retta $x = 2$ è asintoto verticale;
- la retta $y = x + 2$ è asintoto obliquo.

Problema 2. Studia la funzione: $g(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.

Problema 3. È dato un tetraedro qualunque $VABC$; lo si tagli ad una certa altezza con un piano parallelo alla base ABC in modo che risulti massimo il volume del tetraedro $V'A'B'C'$ avente per base la sezione determinata e il vertice V' in un punto qualunque della base del primo (Vedi figura 5). Ricava il rapporto fra le altezze dei due tetraedri.

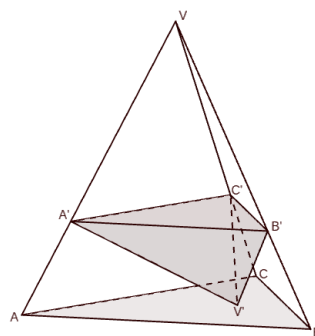


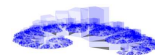
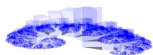
Figura 5: I tetraedri $VABC$ e $V'A'B'C'$

15 Fis prob

Problema 4. Un positrone (*) entra con velocità v_0 perpendicolarmente alla direzione del campo magnetico $\vec{B}(\dagger)$ uniforme. Se descrive una traiettoria circolare di raggio 10 cm , quanto vale v_0 ? Se $v_0 = 7.03 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ quanto vale il modulo della velocità del positrone dopo che ha compiuto un giro completo?

* e^+ carica $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ massa $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$

$\dagger B = 1\text{ G} = 10^{-4}\text{ T}$



Problema 5. Un carica $-q$ entra in un campo magnetico descrivendo la traiettoria mostrata in figura 6. Dopo aver fatto le opportune ipotesi, ricava l'equazione della traiettoria.

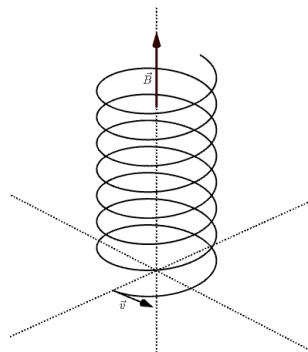


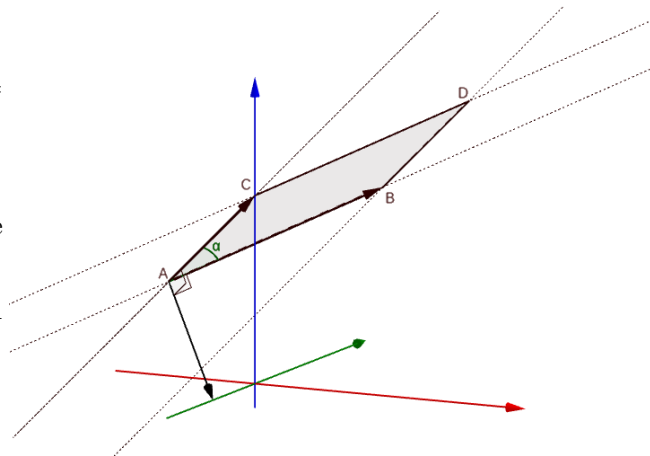
Figura 6: Traiettoria di q

Quesito 1. Maria va in vacanza e chiede ad Anna la sua vicina di casa, la cortesia di innaffiarle la piantina di rose durante la sua assenza. Maria infatti pensa che senza acqua la piantina muoia con probabilità pari a 0.8 mentre se viene innaffiata tale probabilità si riduca a 0.15. La fiducia che Maria ripone sul fatto che Anna effettivamente innaffierà la pianta è pari a 0.9.

- 1) Qual è la probabilità che Maria trovi la piantina viva al ritorno.
- 2) Se invece, al ritorno dal viaggio, la ritrova appassita, qual è la probabilità che Anna si sia dimenticata di innaffiarla?

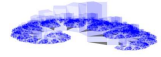
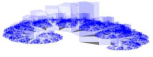
Quesito 2. Sono dati i punti $A = (-1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (0, 0, 2)$.

1. Verifica che A , B , C non sono allineati;
2. Determina le equazioni parametriche della retta r passante per A e ortogonale a entrambi i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.
3. Trova le coordinate del punto D tale che $ABDC$ risulti un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).
4. Calcola l'area del triangolo di vertici A, B, C .

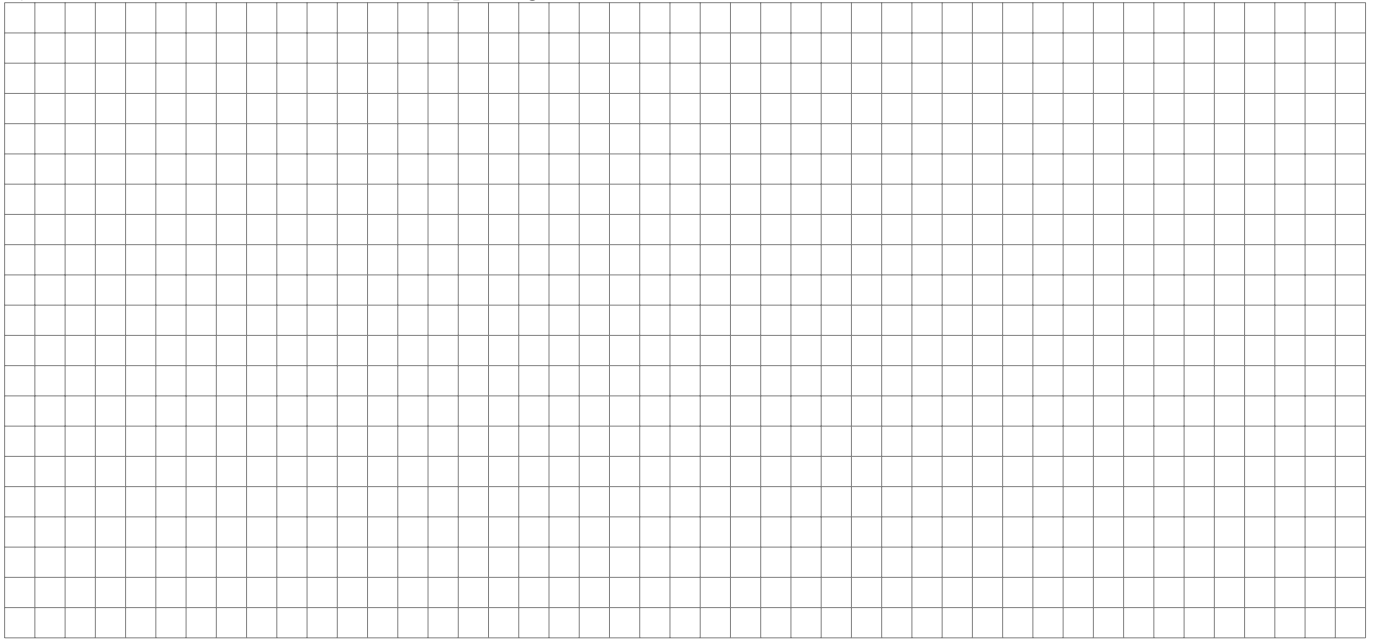


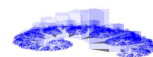
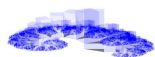
Quesito 1. Ricava da $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, la legge $\vec{F} = i\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.



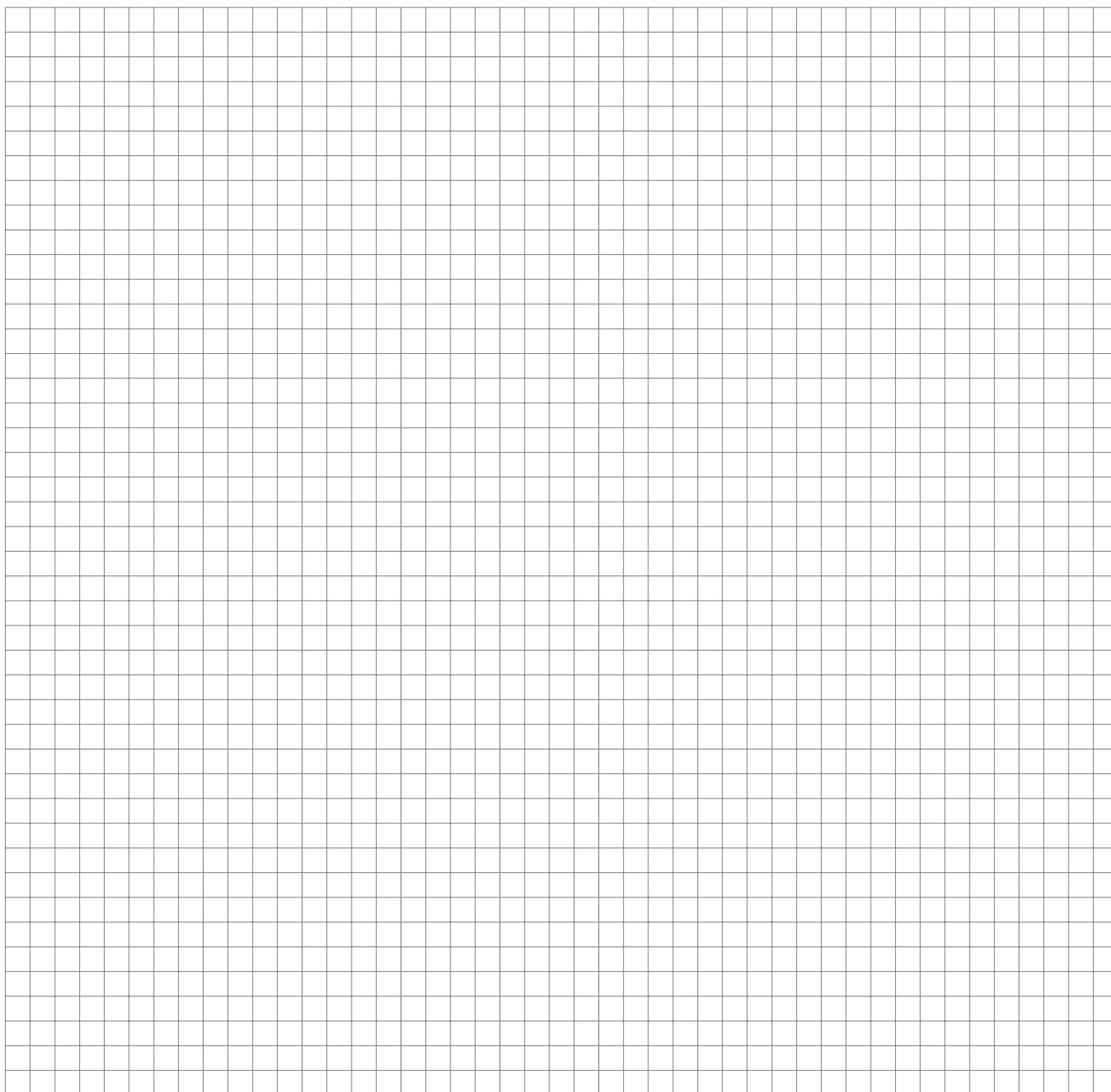
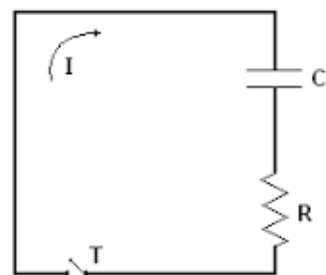


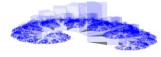
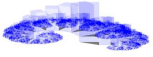
Quesito 2. Ricava l'intensità del campo magnetico all'interno di un solenoide.





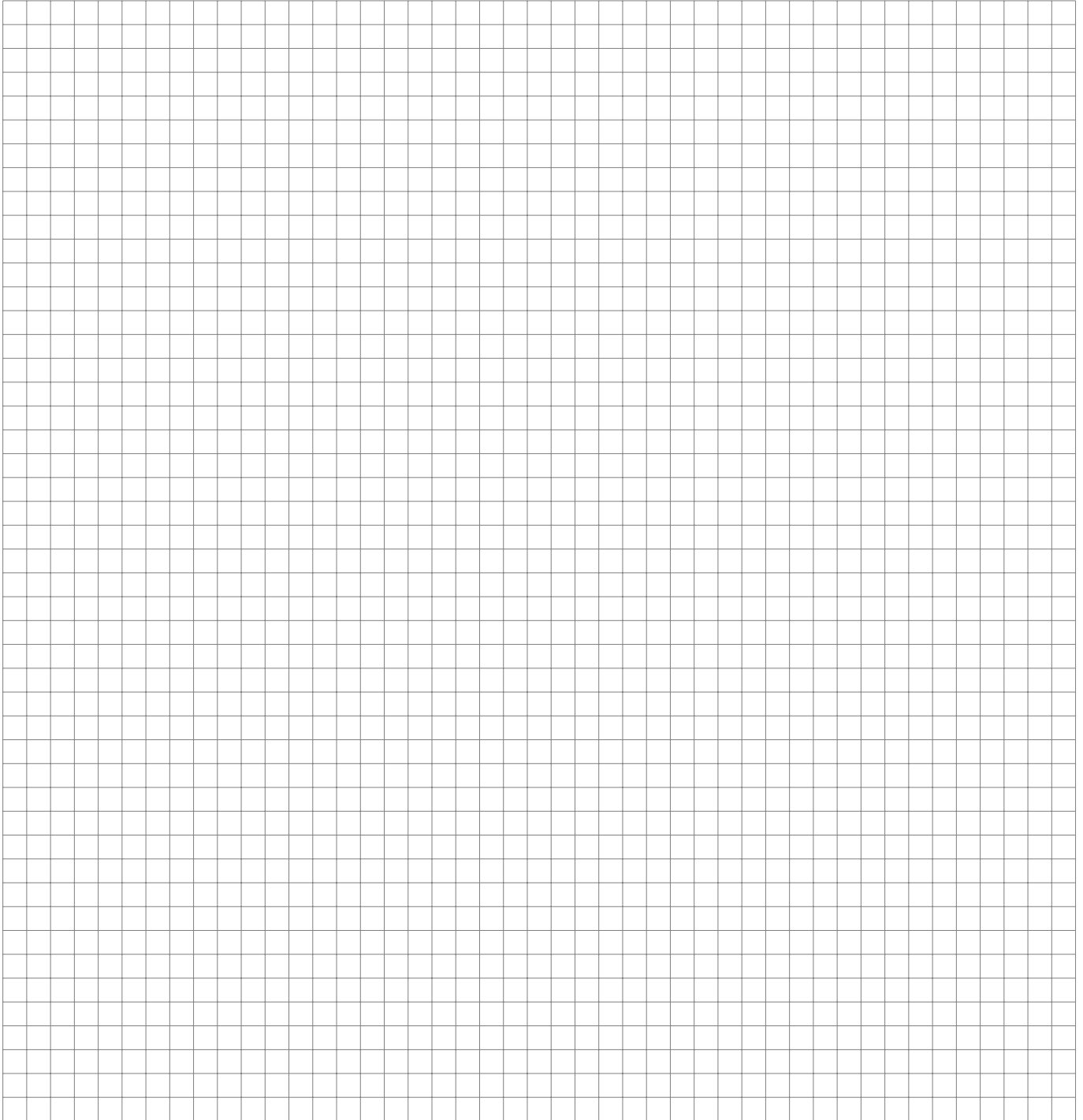
Problema 1. Ricava l'andamento, in funzione del tempo, della corrente in un circuito RC sapendo che nell'istante $t_0 = 0$ s il condensatore è carico $q(t_0) = q_0$.
Spiega, poi, cosa accade nel processo di carica del condensatore.





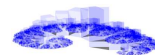
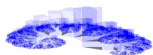
Problema 2. Un elettrone(*) con energia 1.20 keV (†) si muove su un'orbita circolare di raggio 25.0 cm in un piano perpendicolare a un campo magnetico uniforme. Calcola

- a) il modulo della velocità dell'elettrone;
- b) l'intensità del campo magnetico;
- c) il periodo di rivoluzione.



* $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

† $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$



16 Problemi

16.1 Le funzioni

Problema 1. Data $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ ricava che:

- a) f è dispari;
- b) la retta $y = x$ è asintoto obliquo;
- c) nel punto M di ascissa $M_x = -\sqrt{\sqrt{5} - 2}$ si ha un massimo relativo.

Problema 2. Studia la funzione $g(x) = (x + 2) \log(x + 2)$.

16.2 Problema di massimo e minimo

Problema 3. L'interno di un serbatoio, (capacità 32 litri) senza coperchio e dal fondo quadrato, deve essere rivestito di resina sintetica. Tenendo conto che sul fondo vengono applicate due mani di resina(*), quali devono essere le sue dimensioni affinché la quantità di resina utilizzata sia minima?

Cosa cambia se la base è esagonale?

17 Quesiti

17.1 Teoria

Quesito 1. Calcola, se esiste, la derivata nello zero della funzione: $h(x) = \begin{cases} x^2 \log |x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

17.2 Probabilità

Quesito 2. È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del 7%, mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello 0.5%. Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:

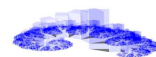
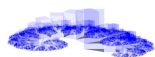
- a) Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?
- b) Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?

17.3 Geometria analitica nello spazio

Quesito 3. Calcola la lunghezza del segmento di minima distanza che congiunge le rette:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + h \\ z = 2 - h \end{cases}$$

*In pratica il fondo richiede doppia quantità di resina rispetto alle pareti



17.4 Problemino in più

Problema 4. Un cubo si trova all'interno di un cono: una faccia è contenuta nella base del cono e la faccia opposta ha i vertici sul cono e il rapporto fra l'altezza (h) del cono e il raggio di base (R) è $\sqrt{2}^a$ (vedi figura 7).

Detto ℓ lo spigolo del cubo, calcola $\frac{h}{\ell}$.

$$^a \frac{h}{R} = \sqrt{2}$$

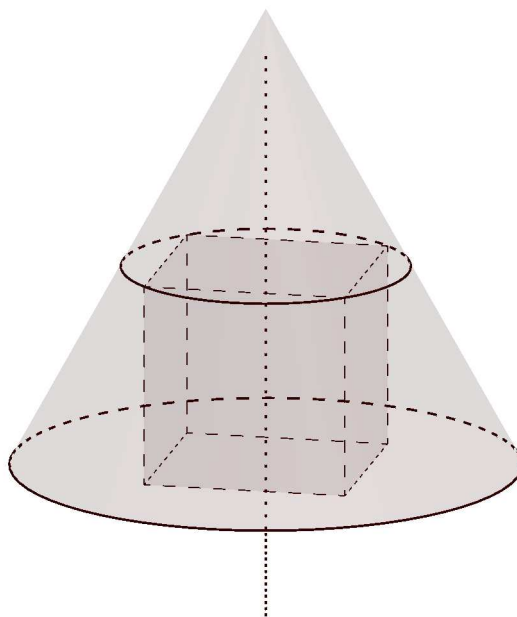


Figura 7

Problema 1. Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali sono fissati due punti $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ con $0 < a < b$. Ricava il punto P del semiasse positivo delle ascisse per il quale risulta massimo l'angolo $\widehat{APB}$. Come devono essere scelti A e B affinché tale angolo misuri $\frac{\pi}{4}$?

Quesito 1. Determina per quali valori di α la disuguaglianza $(1+x)^\alpha > 1+x^\alpha$ è verificata nel dominio di definizione.

Problema 2. Studia la funzione

$$f(x) = x \log \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

Problema 3. Un'urna A contiene n palline tutte Rosse. Un'urna B contiene r palline Rosse ed $n-r$ Nere. Si sceglie a caso un'urna e da essa si effettua una serie di estrazioni con rimpiazzo.

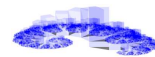
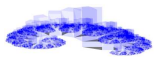
- Qual è la probabilità che la prima pallina sia rossa;
- qual è la probabilità che le prime due palline estratte abbiano colori diversi;
- quante estrazioni sono necessarie in media per veder comparire per la prima volta una pallina rossa.
- Sapendo che le prime k palline estratte sono rosse, qual è la probabilità che l'urna scelta sia A ? Supponiamo che $n = 12$ e $r = 4$, quanto grande dovrà essere k perché si possa concludere che l'urna scelta è proprio A con una probabilità del 99%?

Problema 4. Siano Γ la sfera di raggio $\sqrt{3}$ e centro nel punto $C = (1, 1, 1)$; r la retta per l'origine di direzione $B - A$ ($A = (1, 0, 0)$ $B = (0, 1, 1)$):

- individuare le coordinate del punto $D = r \cap \Gamma$;
- calcola l'equazione parametrica della retta DC ;
- calcola l'angolo che la retta DC forma con il piano xy .

Problema 1. Data la funzione $f_2(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^6}}{x}$

- calcola il limite a $\pm\infty$, motivando con cura il calcolo;
- calcola l'equazione dell'asintoto obliquo, spiegando l'origine delle formule usate.



Problema 2. Data la funzione $f_3(x) = \frac{\sqrt{1+\log(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$

- i) indica il dominio di $f_3(\cdot)$;
- ii) calcola i limiti nei punti di discontinuità;
- iii) calcola la derivata prima.

Quesito 1. Spiega come si è ricavata la formula del numero delle combinazioni di n elementi presi k a k ($C_{n,k} = \binom{n}{k}$)

Quesito 2. Calcola in $\mathbb{C}$ le radici dell'equazione $z^4 - 2i = 0$.

Quesito 3. Dopo aver scritto l'equazione in forma parametrica delle rette AB ($A = (1, 1, 0)$, $B = (-1, 0, 0)$) e CD ($C = (-1, -1, 0)$, $D = (1, 0, 3)$), verifica che sono sghembe.

Problema 1. Data la funzione $f_2(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x^3+x^6}}{x}$

- i) calcola, se esistono, i limiti a $\pm\infty$, motivando con cura il calcolo;
- ii) verifica che la funzione ha come asintoto obliquo la bisettrice del I e III quadrante. Spiega come è stata ricavata la formula per il calcolo dell'asintoto obliquo.

Problema 2. In figura 9 è riportato il grafico ($\mathcal{G}(j)$) della funzione $j(x)$ e della retta r suo asintoto obliquo. Spiega, qualora ti fosse nota la legge di j , come potresti dimostrare che la retta r , nel semipiano delle ascisse positive, non ha altre intersezioni con il grafico di j oltre a M .

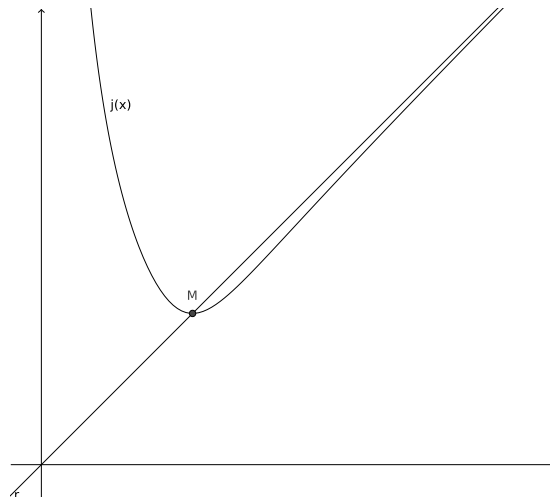


Figura 8: $\mathcal{G}(j)$ e r

Problema 3. Data la funzione $f_3(x) = \frac{\sqrt{\log(x)+2}}{\sqrt{1-x^4}}$

- i) indica il dominio di $f_3(\cdot)$;
- ii) quali fra i seguenti limiti si possono calcolare:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x);$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x);$

(e) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f_3(x);$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_3(x);$

(d) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e^2}} f_3(x);$

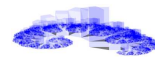
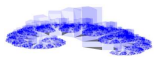
motiva dettagliatamente la risposta, indicando in particolare in quali casi l'operatore limite è stato usato anche se la funzione in quel punto risulta già definita continua.

- iii) calcola $f_3'(x)$.

Problema 1. Sia $\tilde{f}: \left[-1, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ la cui legge è $\tilde{f}(x) = |x^3 - x^2|$, dimostra che $\tilde{f} \in C^2_{\left[-1, \frac{1}{2}\right]}(*)$

Considera ora la funzione $g(x) = e^{x^2-x^3}$

* C^2 l'insieme delle funzioni derivabili due volte con continuità nell'insieme indicato a pedice



- a) studia la funzione fino a determinare i massimi e minimi relativi;
b) senza studiare la derivata seconda, indica, motivando la risposta, quanti sono e dove sono posizionati i flessi.

Problema 2. Nella regione di piano compresa fra la parabola di equazione $y = x - \frac{x^2}{2}$ e l'asse delle ascisse, considera un trapezio isoscele $OABC$, avente come base maggiore il segmento di vertici $O = (0, 0)$ e $A = (2, 0)$ e come base minore i punti C, D appartenenti alla parabola.

Determina le coordinate del punto C , per cui il volume del solido ottenuto da una rotazione di 2π del trapezio, attorno all'asse delle ascisse, è massimo.

18 Quesiti

Quesito 1. Spiega perché alla funzione $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = |1 - x^2|$, non è applicabile il teorema di Rolle.

Ricava una restrizione di f in cui è possibile applicare il teorema.

Quesito 2. Da un rilevamento statistico è noto che una certa popolazione è composta per il 40% da fumatori abituali. È noto inoltre che il 5% dei decessi avviene a causa di un certo tipo di tumore. Infine, si è constatato che tra quanti sono deceduti a causa di quel tipo di tumore il 60% erano fumatori abituali. Calcolare la probabilità per i fumatori abituali di morire per un tumore di quel tipo.

Quesito 3. Dati nello spazio il piano $\pi : kx + 2y - (3 + k)z + 41 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ determina, se esistono, i valori di k e per i quali:

- a) r è incidente a π ; b) r è parallela a π ; c) r è perpendicolare a π .

Problema 3. In un tetraedro $ABCD$ le facce ABC e CDA sono triangoli rettangoli ($\widehat{B} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{D} = \frac{\pi}{2}$), detti M ed N i punti medi dei segmenti BD e AC , si ha che $AM = MC$. Dimostra che MN è il segmento di minima distanza fra AC e BD .

Quesito 1. Verificare che la funzione: $f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$ ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione: $g(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$ ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

Quesito 2. Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione: $\alpha : x - 3y + z - 5 = 0$ e $\beta : x + 2y - z + 3 = 0$. Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x - y + z + 1 = 0$.

Quesito 3. Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione $r(t)$. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

Quesito 4. In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$ e il piano π di equazione: $x + 2y - z + 2 = 0$, determinare per quale valore di k la retta r e il piano π sono paralleli, e la distanza tra di essi.

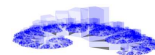
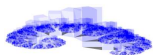
Quesito 5. Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ che ha il centro sull'asse y ed è tangente al grafico $\mathcal{G}_f$ di $f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso.

Problema 1. Data la famiglia di funzioni $f_k(x) = \frac{e^{kx}}{x^2 + k}$:

- i) stabilisci per quali valori del parametro reale k , la funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$;

- ii) studia $f_{(-\frac{1}{4})}(x) = \frac{4e^{-\frac{1}{4}x}}{4x^2 - 1}$





Quesiti $\mathcal{M}ate\mathcal{F}is$

Quesito 1. Una scatola contiene quattro schede, una di esse ha entrambi i lati rossi, mentre le altre hanno un lato rosso e uno bianco. Una scheda viene estratta e se ne guarda uno solo dei lati: è rosso. Qual è la probabilità che anche l'altro lato sia rosso?

Quesito 2. Calcolare la derivata della funzione $k(x) = g(x)^{\frac{1}{g(x)}}$ sapendo che $g'(x) = \frac{x^2}{g(x)}$

Quesito 3. Ricava la forza agente fra due fili paralleli percorsi dalla stessa corrente i .^(†)

Quesito 4. Dividere 8 in due parti in modo che la somma dei loro cubi sia minima.

Quesito 5. Data la funzione $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |\sin(\pi x)|$, è possibile applicare il teorema di Rolle nel dominio di definizione? Motiva la risposta.

Quesito 6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile quattro volte con derivata quarta continua tale che: $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) = 1$.

Dimostra, usando la formula di Taylor, che x_0 è un punto di minimo locale.

Problema 1. Data la funzione $f(x) = \log(e^{-x} + 1)$:

- 1) studia f e costruisci il suo grafico $\mathcal{G}_f$;
- 2) dimostra che f è invertibile nel dominio di definizione;
- 3) ricava che il grafico $\mathcal{G}_g$ della funzione $g(x) = -\log(e^x - 1)$ è, nello stesso riferimento xOy , quello della funzione inversa di f ;
- 4) dimostra che la bisettrice del II e IV quadrante ($y = -x$) è l'asintoto obliquo della funzione f ;
- 5) ricava che $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ si intersecano in A la cui ascissa è $\log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

Problema 2. Fra tutti i prismi esagonali regolari inscritti nella medesima sfera di raggio di misura r , qual è quello di volume massimo?

Quesito 1. Dimostra che se una funzione ha derivata sempre nulla è costante.

Quesito 2. Dimostra che la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ammette un solo zero.^(*)

Quesito 3. Sia

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}}_a + \underbrace{\frac{e^\xi x^4}{4!}}_b \quad (2)$$

- i) come sono definiti a e b ?
- ii) se per calcolare $\sqrt[3]{e}$ utilizzo la (2) che errore commetto? (Spiega i calcoli)

Quesito 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$$

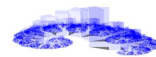
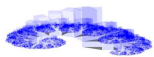
Dimostra che esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_0) = 0$.

Problema 3. Data la funzione $k(x) = e^x - 2(x + 1)$:

- 1) dimostra che esistono $\alpha \in [-1, 0]$ e $\beta \in [1, 2]$ tali che $k(\alpha) = k(\beta) = 0$;
- 2) dimostra che α e β sono gli unici zeri della funzione k ;
- 3) stima α a meno di $\frac{1}{100}$.

[†]Distingui i casi: corrente con verso concorde e corrente con verso discorde

^{*} $\exists! \xi : f(\xi) = 0$



Problema 1. Considera la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 1}$

- a) studia la funzione;
 b) detta $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ calcola $g'(x)$;
 c) calcola $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^3}$

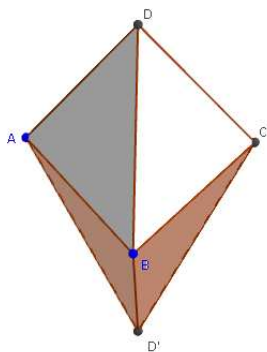


Figura 9: Poliedro formato da sei **triangoli equilateri** di lato 2ℓ

Quesito 1. Dimostra che la funzione

$$k(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log|x| - 1} & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$

Quesito 2. In una moneta truccata, testa esce con probabilità p . Si lancia la moneta due volte. Quanto deve valere p affinché la probabilità che esca due volte croce sia del 50%?

Quesito 3. Considera il solido di figura 9. Costruisci al suo interno il prisma di volume massimo avente per base la sezione del solido ottenuta con un piano parallelo al piano ABC e l'altra simmetrica rispetto lo stesso piano.

Quesito 4. Calcola l'angolo diedro formato dai piani BCD e BCD' (figura 9).

Quesito 5. Abbiamo un segmento e lo suddividiamo in tre parti prendendo due punti a caso. Qual è la probabilità che i tre segmenti possano formare un triangolo?

Quesito 6. Sia $h = j^{-1}(*)$, sapendo che: $j(0) = -1$, $j'(0) = 3$ calcola $h'(-1)$.

Quesito 7. Individua i punti del piano di Gauss per cui: $z^2 - (z^*)^2 = i$.

Quesito 8. Determina H e α tali che $A \cos(3x) + B \sin(3x) = H \sin(\alpha + 3x)$

Quesito 9. Dimostra, indicando i teoremi usati, che la seguente disequazione è soddisfatta nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$e^x > \sin x + \cos x$$

Quesito 10. Discuti, indicando i teoremi usati, al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$e^x - x = k$$

Quesito 11. Dimostra, indicando i teoremi usati, che l'equazione

$$\sin x = x - 1$$

ammette una e una sola soluzione in $\xi \in \mathbb{R}$. Stima ξ con quattro cifre significative.

Non solo coppie al lavoro

D'Andrea
Modolo
Vitale

Gerolami
Papapietro

Lazzarin
Gabelli

Miotto
Marigliano

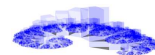
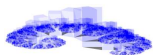
Pielli
Santarossa

Romano
Bongiovanni

Problema 1. Studia la funzione

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

* j^{-1} funzione inversa di j



Quesito 1. Un cono è inscritto in una sfera di raggio R . Determina l'altezza h del cono che minimizza la somma della superficie laterale e della base del cono.

Quesito 2. Un serbatoio a forma di cono (senza coperchio) deve avere un volume di $100\pi \text{ m}^3$. Il costo del materiale è di 20 €/m^2 per la base e 10 €/m^2 per la superficie laterale. Trova le dimensioni che minimizzano il costo.

Quesito 3. In un centralino telefonico arrivano in media 3 chiamate al minuto. Calcola la probabilità che:

- a) In un minuto non arrivi nessuna chiamata.
- b) In 2 minuti arrivino esattamente 4 chiamate.

Quesito 4. Quanti triangoli si possono formare con 8 punti distinti nello spazio, sapendo che 3 di essi sono allineati?

Quesito 5. Dati i punti $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 0, -1)$, e $C = (2, 1, 0)$:

- a) Trova l'equazione del piano passante per i tre punti.
- b) Calcola l'equazione della sfera di centro $O = (0, 0, 0)$ tangente al piano trovato.
- c) Calcola l'equazione della sfera di raggio minimo che passa per A, B, C .

Quesito 6. Sia $f(x) = e^x \cos x$ definita su $[0, \pi]$.

- a) Dimostra che esiste almeno un punto $c \in (0, \pi)$ in cui la tangente alla curva $y = f(x)$ è parallela alla retta secante passante per i punti $(0, f(0))$ e $(\pi, f(\pi))$.
- b) Utilizza il Teorema di Lagrange per stimare e^π .

Problema 2. La tabella seguente riporta i valori in alcuni punti delle funzioni $f(x), g(x)$ e delle loro derivate $f'(x), g'(x)$.

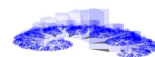
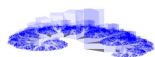
x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-3	4	1	4	-1
-2	0	-3	5	-2
-1	-2	4	6	0
0	1	-1	3	-1
1	-2	-3	-1	-4
2	0	-3	2	1
3	-4	-6	-2	4

- a) Calcola nel punto $x_0 = 1$ la derivata della funzione prodotto $f(x) \cdot g(x)$;
- b) calcola nel punto $x_0 = 0$ la derivata della funzione composta $f(g(x))$;
- c) calcola nel punto $x_0 = -1$ la derivata della funzione quoziente $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Quesito 7. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3^{\sin^2 x} - 1}{x \operatorname{tg} x} & \text{se } x < 0 \\ \log(1 + \sqrt{a+x}) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

trova $a \in \mathbb{R}$ per cui f è continua nello 0.



Problemi

Problema 1. Sia $f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{e^x + 1}$:

a) studia la funzione;

b) dopo aver ricavato che $f''(x) = \frac{(e^{3x} + 3e^{2x} + 5e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^3}$, utilizzando il teorema di Rolle, dimostra che la funzione f ha un solo flesso.^(*)

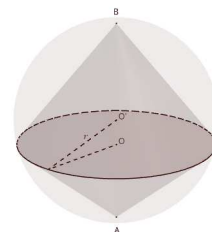
Quesiti

Quesito 1. Una piramide regolare quadrangolare $VABCD$ ha lo spigolo di base di 6 m e l'altezza di 4 m . La sezione della piramide con un piano parallelo alla base è il quadrato $EFGH$, la cui proiezione sul piano di base della piramide è $E'F'G'H'$. Determina la distanza di tale piano dal vertice della piramide in modo che l'area della superficie laterale della prisma $EFGHE'F'G'H'$ sia massima.

Quesito 2. Considera il diametro AB di una sfera di raggio r e un centro O' sia $O \in O'A$. Taglia la sfera con un piano perpendicolare in O ad AB in modo che la differenza dei volumi dei due coni^(a), aventi per base il cerchio sezione e per vertici i punti A e B , sia massima.

Determina la distanza AO .

^aIl cono di vertice B meno il cono di vertice A



Quesito 3. Calcola il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log_2 x$$

e poi dimostra il teorema de L'Hôpital.

Quesito 4. Determina i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \alpha x^2 + (x^3 + 3x) \operatorname{arctg}(x) - \log(1 + x^2)$$

risulti convessa in tutto il dominio.

Quesito 5. La trasmissione di un segnale può avvenire utilizzando due diversi canali A e B, A trasmette il 35% dei segnali mentre B il restante 65%. A trasmette sempre segnali corretti, B, invece, trasmette il segnale correttamente con probabilità $\frac{4}{5}$.

a) Qual è la probabilità che venga trasmesso un segnale corretto;

b) Se viene inviato un segnale corretto qual è la probabilità che sia stato inviato da B?

Quesito 6. Una sfera, il cui centro è il punto $K = (-2, -1, 2)$, è tangente al piano π avente equazione: $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

19 Quesiti “sostitutivi”

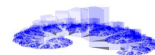
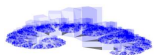
- Puoi sostituire con il quesito corrispondente

Quesito 6. I punti $A = (3, 4, 1)$, $B = (6, 3, 2)$, $C = (3, 0, 3)$, $D = (0, 1, 2)$ sono vertici di un quadrilatero $ABCD$. Si dimostra che tale quadrilatero è un parallelogramma e controlla se è un rettangolo.

- Puoi sostituire uno qualunque dei quesiti 1-2-3-4-5 con quelli qui sotto riportati.

Quesito 100. Dopo aver ricavato che $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, dimostra che $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$

^{*}È chiaro che la richiesta può essere risolta con l'uso della calcolatrice, che risolve le equazioni di III grado, ma qui si chiede di utilizzare il teorema di Rolle o eventualmente proprietà delle cubiche.



Quesito 101. Un dado a forma di tetraedro viene fatto rotolare^(†), sapendo che inizialmente la faccia nascosta (base) è 3 qual è la probabilità che dopo n rotolamenti si trovi nuovamente con la faccia nascosta 3.

20 Questo è un

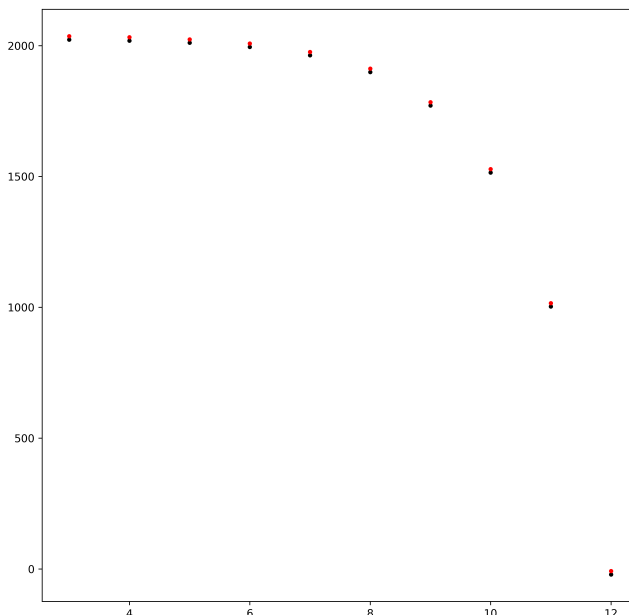


?...ma
anche no!

Quesito 2026. Sia a_n la successione così definita $\forall n \geq 1$:

$$\begin{cases} a_1 = 2026 \\ a_2 = 2025 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \end{cases}$$

Determina $2a_{2025} - a_{2026}$.



21 Mate problema

Problema 1. Sia data la famiglia di funzioni reali di variabile reale:

$$f_n(x) = x^n e^{-x^2} \quad n \in \mathbb{N}$$

- discuti, nel caso n pari ed n dispari, il tipo di simmetria della funzione.
- studia la funzione nel caso $n = 3$

22 Fis problema

Problema 2. Una spira rettangolare di lati $a = 15 \text{ cm}$ e $b = 20 \text{ cm}$, rispettivamente paralleli all'asse delle x e all'asse delle y , resistenza $R = 25 \Omega$ e massa $m = 4.0 \text{ g}$ scivola senza attrito sul piano xy . Al tempo $t = t_0 = 0$ la spira ha velocità $v_x(t_0) = v_0 = 4.0 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ed entra nel semipiano $x > 0$ dove è presente un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = 0.50\vec{k} \text{ T}$. Determina:

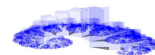
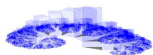
- l'accelerazione a cui è soggetta la spira;
- la legge $v(t)$ (velocità con cui si muove la spira nel tempo).

23 Quesiti: tre a scelta di cui almeno uno di Fis

Quesito 1 (Mate). Una somma di $P \text{ €}$ è depositata in una banca che paga un interesse al tasso annuale r , calcolato m volte all'anno. (Per esempio $r = 0,06$ quando il tasso annuale è del 6%.)

Dimostra che la somma totale del capitale più l'interesse alla fine di n anni è $P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$. Se r ed n sono fissi, questa somma tende al limite Pe^{rn} per $m \rightarrow +\infty$. Ciò motiva la seguente definizione: diciamo che il

[†]un rotolamento consiste nel passaggio da una faccia (ad esempio 1) ad una qualsiasi delle altre tre facce (2,3,4)



denaro aumenta di un tasso annuale r quando questo è calcolato continuamente se la somma $f(t)$ dopo t anni è $f(0)e^{rt}$, dove r è un numero reale non negativo.

Approssimativamente quanto tempo ci vuole perché un conto in banca, depositato al tasso d'interesse del 6% annuo, raddoppi, se l'interesse è calcolato continuamente?

Quesito 2 ($\mathcal{F}is$). In un circuito LCR nell'istante $t = 0$ nel condensatore è depositata la carica q_0 , affinché il circuito oscilli in modo smorzato (vedi figura 10) come devono essere scelti i componenti L , C , ed R ? Motiva la risposta.

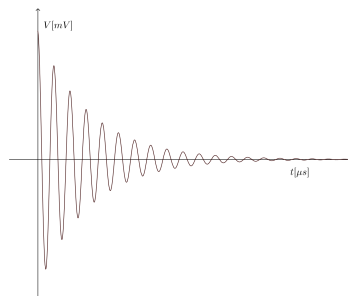


Figura 10

Quesito 3 ($\mathcal{M}ate$). Determina il tronco di cono, inscritto in una semisfera di raggio R , di superficie laterale massima.

Quesito 4 ($\mathcal{F}is$). Come è stata ricavata la IV legge di Maxwell $\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d(\Phi(\vec{E}))}{dt}$

Quesito 5 ($\mathcal{M}ate$). Sia Γ_0 una sfera tangente al piano $\pi : x + y + z = 2$ di raggio $R = 2\sqrt{3}$ avente il centro C sulla retta $r : P = (1, 0, 1) + t(1, 1, 0)$.

Calcola:

- l'equazione delle superfici sferiche Γ_i ;
- le coordinate dei punti T_i in cui le Γ_i sono tangenti a π .

Quesito 6 ($\mathcal{M}ate$). In un contenitore ci sono 20 dadi (a sei facce) di cui il 40% regolari mentre i restanti presentano 4 facce con un solo punto e 2 con sei punti. Estraggo due dadi li lancio:

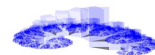
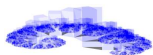
- qual è la probabilità di ottenere una coppia di sei?
- Sapendo che ho ottenuto una coppia di sei qual è la probabilità che i dadi siano uno regolare e l'altro non regolare?

24 $\mathcal{M}ate$ problema

Problema 1. Sia data la famiglia di funzioni reali di variabile reale:

$$f_k(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + k}$$

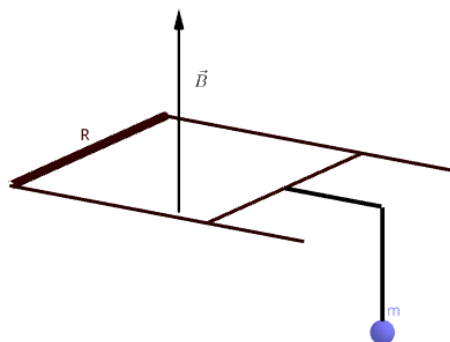
- determina per quali valori di k il dominio coincide con $\mathbb{R}$;
- dopo aver verificato che tutte le f_k passano per $A = (-2, 0)$ e $O = (0, 0)$, studia la funzione nel caso $k = 1$



25 $\mathcal{Fis}$ problema

Problema 2. Una spira rettangolare piana di resistenza complessiva $R = 3.0 \, \Omega$ ha un lato mobile di lunghezza $\ell = 13 \, \text{cm}$ e massa $M = 180 \, \text{g}$. La spira è attraversata in direzione normale da un campo di induzione magnetica di intensità $B = 1.0 \, \text{T}$. Al lato mobile è appeso un grave di massa $m = 20 \, \text{g}$. Trascurando gli attriti meccanici e l'autoinduzione, calcola:

- 1) l'intensità della corrente indotta;
- 2) l'accelerazione a cui è sottoposto il lato mobile della spira.



26 Quesiti: tre a scelta di cui almeno uno di $\mathcal{Fis}$

Quesito 1 ($\mathcal{Mate}$). Si stima che il 45% delle email siano spam. Alcuni software sono stati utilizzati per filtrare queste email di spam prima che raggiungano la tua casella di posta. Il software A afferma di poter rilevare il 99% delle email di spam ma al 5% rileva email non spam come spam.

Se un'email viene rilevata come spam, qual è la probabilità che in realtà non lo sia?

Quesito 2 ($\mathcal{Fis}$). Spiega come abbiamo ricavato la relazione $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

Quesito 3 ($\mathcal{Mate}$). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile con continuità e siano $f(2) = 1$, $f'(2) = 4$. spiega perché f è invertibile in un intorno di $x = 2$ e calcola $(f^{-1})'(1)$. (*)

Quesito 4 ($\mathcal{Fis}$). Quali sono i due tipi di esperimenti in cui si osserva il fenomeno dell'induzione elettromagnetica? Quali sono i meccanismi fisici che causano la f.e.m. indotta nei due casi?

Quesito 5 ($\mathcal{Mate}$). Data la famiglia di funzioni $g_k(x) = -x^3 + 6kx + 33$, determina il valore $\tilde{k}$ per cui $g_{\tilde{k}}$ ha come tangente nel punto di ascissa 3 la retta parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Ricava, poi, l'equazione della tangente.

Quesito 6 ($\mathcal{Mate}$). È dato un triangolo ABC con $BC = 2AB$. Indica con D il punto medio di BC e con E il punto medio di BD . Dimostra che AD biseca $\widehat{CAE}$.

Quesito 7 ($\mathcal{Fis}$). Determina l'espressione dell'induttanza L di un solenoide ideale.

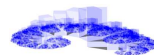
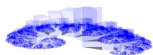
Ricava che la densità di energia magnetica è $u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$.

Quesito 8 ($\mathcal{Mate}$). Determina per quali valori del parametro reale h le rette

$$r : \begin{cases} x - 2hy + 3z = 0 \\ hx + y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + hy = 2 \\ y - hz = 0 \end{cases}$$

sono parallele, incidenti o sghembe.

* f^{-1} è la funzione inversa di f



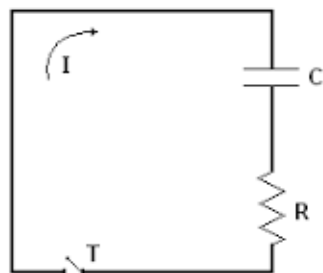
Quesito 1. Ricava da $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, la legge $\vec{F} = i\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

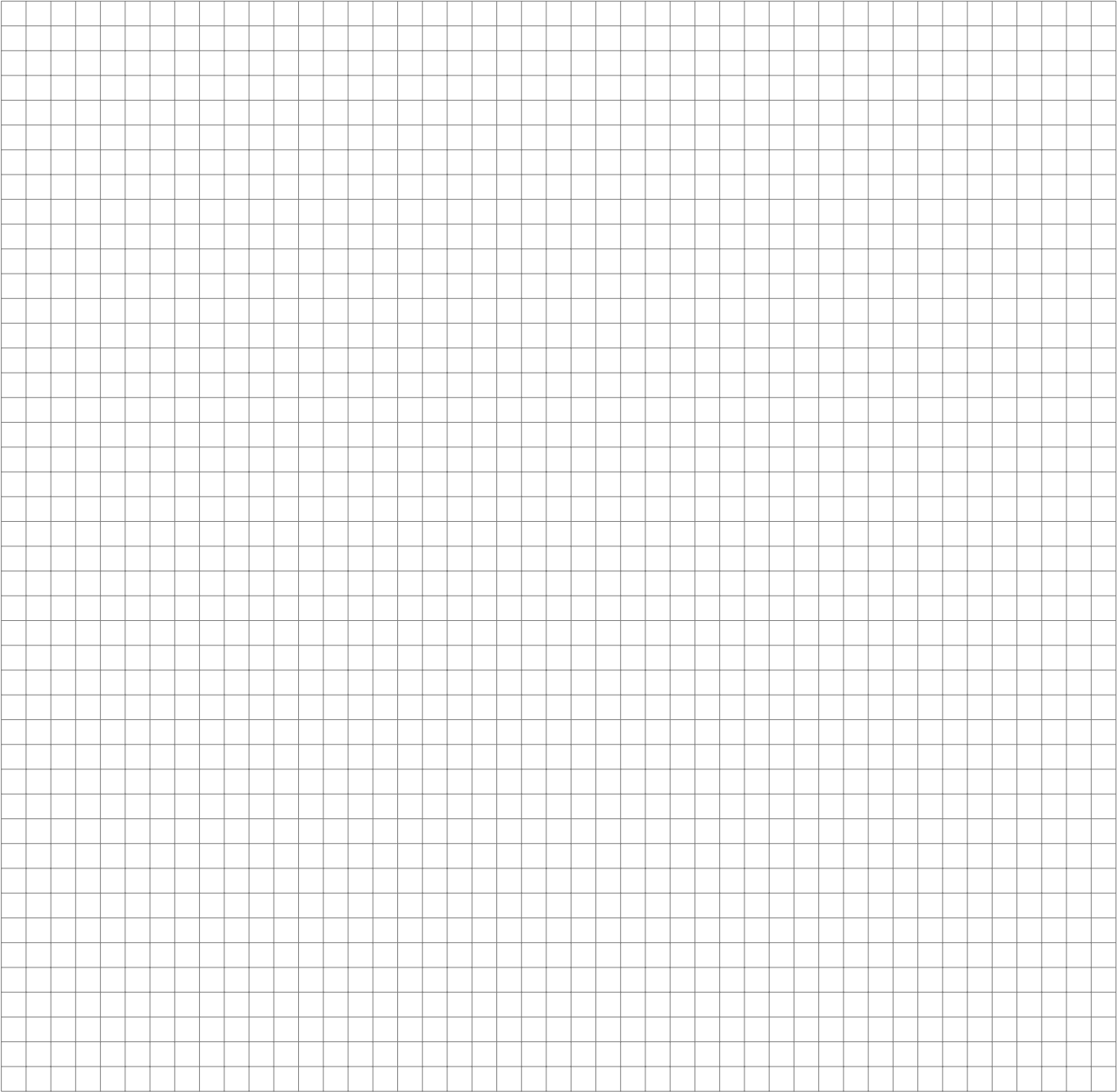
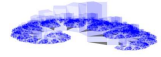
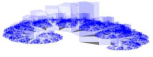


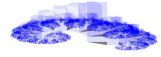
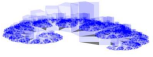
Quesito 2. Ricava l'intensità del campo magnetico all'interno di un solenoide.



Problema 1. Ricava l'andamento, in funzione del tempo, della corrente in un circuito RC sapendo che nell'istante $t_0 = 0$ s il condensatore è carico $q(t_0) = q_0$.
Spiega, poi, cosa accade nel processo di carica del condensatore.

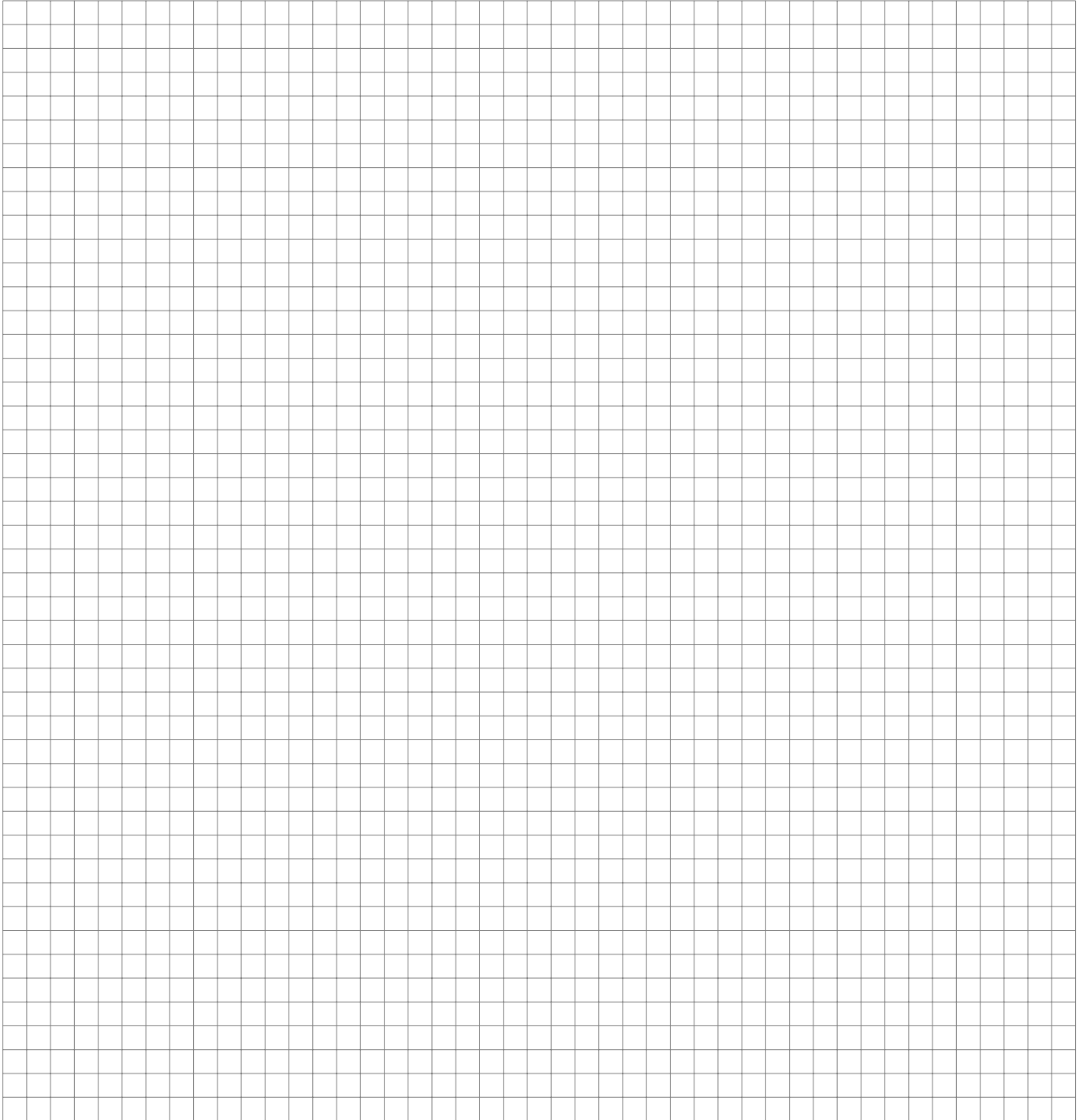






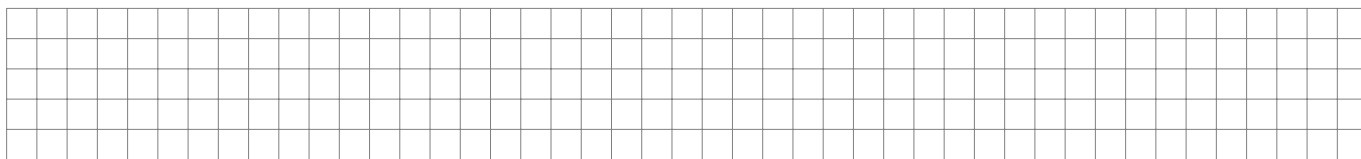
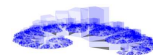
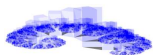
Problema 2. Un elettrone(*) con energia 1.20 keV (†) si muove su un'orbita circolare di raggio 25.0 cm in un piano perpendicolare a un campo magnetico uniforme. Calcola

- a) il modulo della velocità dell'elettrone;
- b) l'intensità del campo magnetico;
- c) il periodo di rivoluzione.

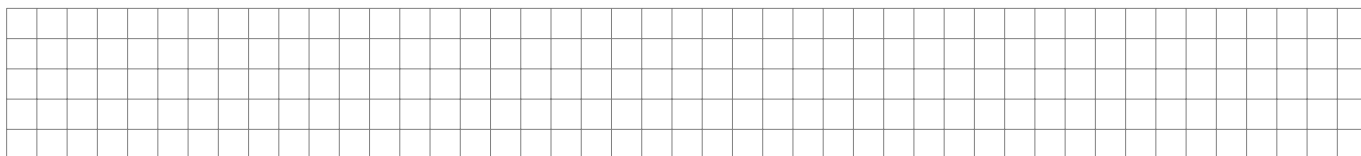


Quesito 1. In un circuito puramente resistivo, come si calcola la potenza dissipata nella resistenza?

* $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
† $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

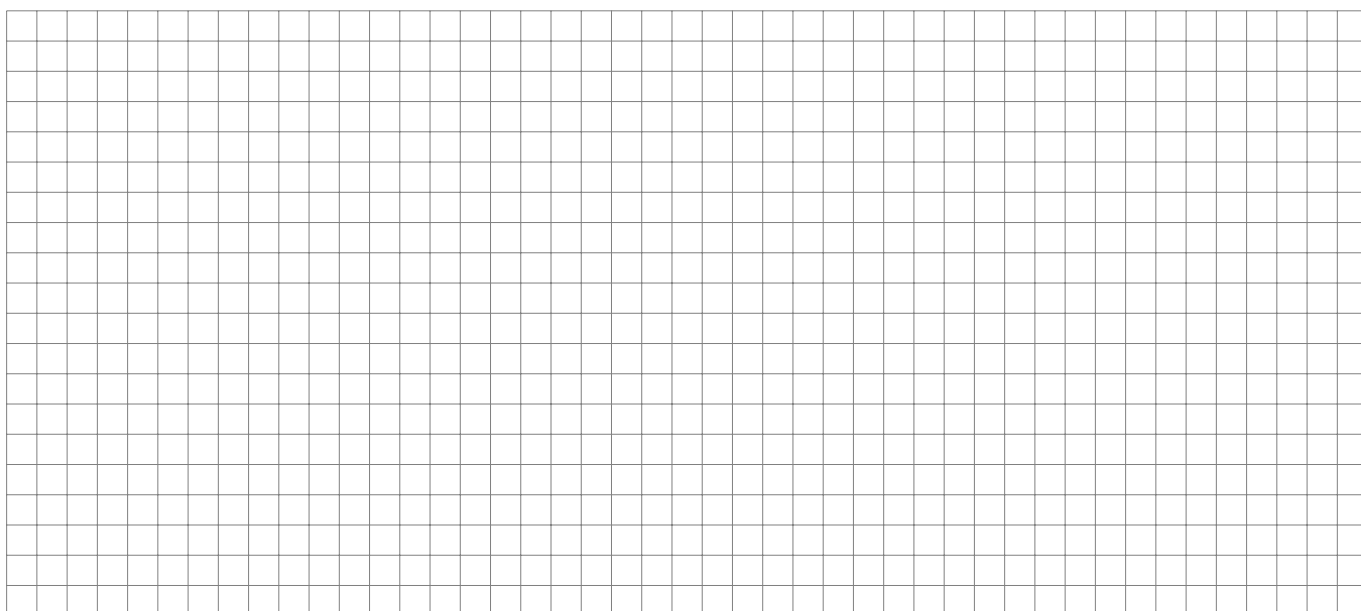


Quesito 2. Definizione di flusso di un generico campo vettoriale $\vec{H}$ attraverso una superficie chiusa S .



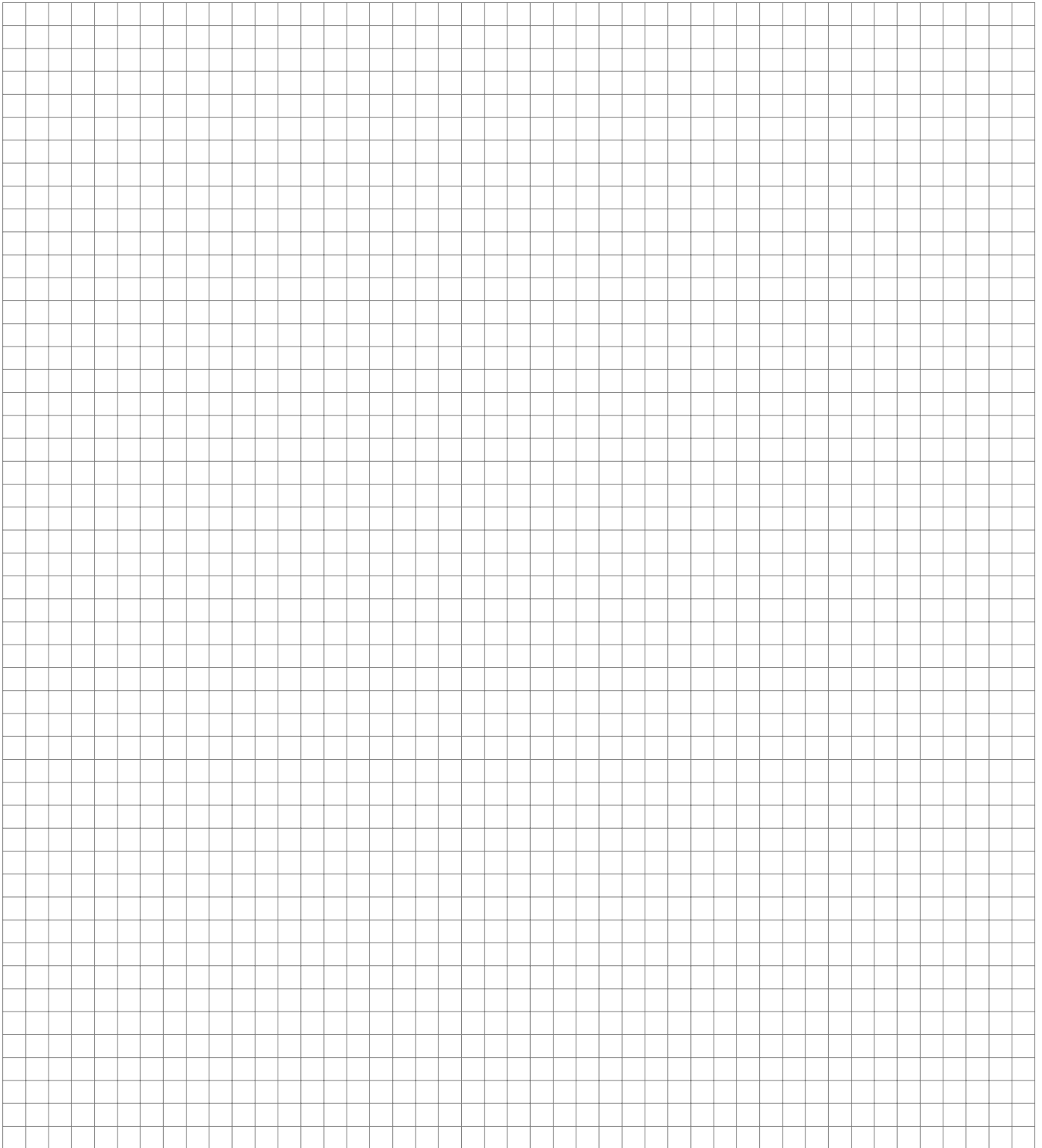
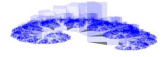
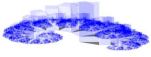
Problema 1. Una spira quadrata di resistenza R è immersa in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ la direzione del campo è perpendicolare alla spira, il suo modulo varia nel tempo con la seguente legge $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$.

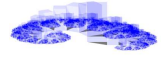
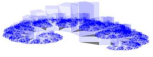
- i) Ricava la corrente indotta $i(t)$ che si genera nella spira;
- ii) indica come si può calcolare l'energia media dissipata dalla resistenza in un periodo.



Quesito 3. Ricava la IV equazione di Maxwell(*).

$$*\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d(\Phi(\vec{E}))}{dt}$$





Problema 2. Un circuito chiuso di forma rettangolare di dimensioni a cm e b cm contenente un condensatore di capacità C è parzialmente immerso in una regione di campo magnetico larga L cm (figura 11). Il campo magnetico ha direzione e verso ortogonale al circuito e modulo che varia nel tempo con la legge $B(t) = B_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. Determina segno e quantità di carica $q(t)$ presente sulle armature del condensatore.

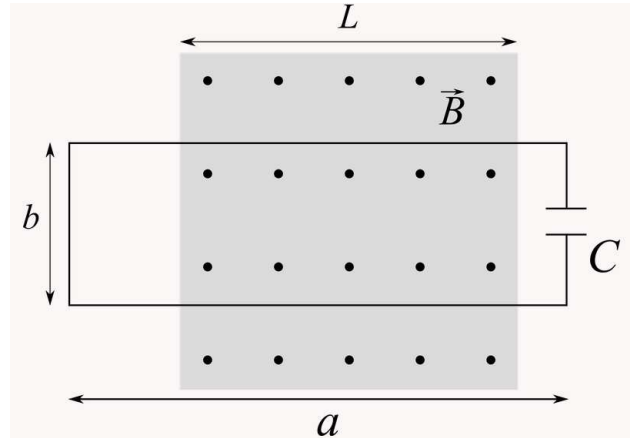


Figura 11

