

Problema 1. Assegnata la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

$$f_{(a,b)}(x) = ax^4 + bx^2$$

con a, b parametri reali:

- 1) determina i valori dei parametri a e b tali che il grafico $\mathcal{G}_f$ della funzione f intersechi l'asse delle ascisse in tre punti distinti di cui uno avente ascissa $\sqrt{2}$, e le rette tangenti a $\mathcal{G}_f$ in tali punti formino nel semipiano $y \leq 0$ un triangolo di area $8\sqrt{2}$;
- 2) verificato che risultano $a = 1$ e $b = -2$, studia il grafico della funzione;
- 3) determina l'area della regione finita di piano racchiusa tra $\mathcal{G}_f$ e le due tangenti a $\mathcal{G}_f$ nei punti d'intersezione di ascissa non nulla tra $\mathcal{G}_f$ e l'asse x ;
- 4) calcola il volume del solido ottenuto da una rotazione completa attorno all'asse y della regione finita di piano compresa tra $\mathcal{G}_f$ e la retta $y = -1$ internamente al semipiano $x \geq 0$, quindi risolvi l'analogo problema per la regione finita di piano compresa tra $\mathcal{G}_f$ e l'asse x nel semipiano $x \geq 0$;
- 5) verifica che l'equazione $f''_{(1,-2)}(x) + f'_{(1,-2)}(x) + 6f_{(1,-2)}(x) + 4 = 0$ ⁽¹⁾ ammette, oltre alla radice banale $x = 0$, una sola radice reale $\underline{x}$ strettamente positiva.

Problema 2. Assegnata la famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni reali di variabile reale il cui termine generale è definito da

$$f_a(x) = \frac{2x}{x^2 + a^2}$$

per ogni valore del parametro reale $a > 0$:

- i) verifica che il grafico $\mathcal{G}_{f_a}$ di ciascuna funzione f_a ammette esattamente un punto di massimo e uno di minimo assoluti;
- ii) verifica che la retta passante per i suddetti punti di massimo e minimo di $\mathcal{G}_{f_a}$, racchiude con $\mathcal{G}_{f_a}$ stesso una regione finita di piano la cui area, al variare dal parametro a , rimane costante;
- iii) determina il valore del parametro a tale per cui la distanza tra il punto di massimo e quello di minimo del grafico $\mathcal{G}_{f_a}$ risulta minima;
- iv) studia la funzione $f_1(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Quesito 1. Nel 1484 il matematico francese Nicolas Chuquet (1445?-1488?), nella sua opera *Triparty en la science des nombres*, espose la “règle des nombres moyens” (regola dei numeri medi): dati 4 numeri positivi non nulli a, b, c, d , il numero $\frac{a+b}{d+c}$ risulta sempre compreso fra $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Dimostra la correttezza di tale regola.

Quesito 2. Date le funzioni $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{x^n}$ e $g_m(x) = \frac{\cos(x)}{x^m}$, dimostra che, per ogni possibile valore naturale non nullo assunto dai parametri n e m , entrambe le funzioni tendono a zero al tendere di x a $+\infty$. Discuti quindi, al variare dei valori assunti dai parametri, l'esistenza e l'eventuale valore del limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{g_m(x)}$.

Quesito 3. È Data una parabola $\mathcal{P}$, consideri l'insieme di tutte le corde di $\mathcal{P}$ avente una direzione prefissata. Dimostra che il luogo dei loro punti medi è una semiretta parallela all'asse della parabola.

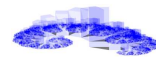
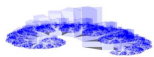
Quesito 4. Costruisci, definendola eventualmente a tratti, una funzione continua e derivabile su $\mathbb{R}$ tale per cui $M_1 = (2, 2)$ e $M_2 = (-2, 2)$ risultino punti di massimo assoluto del suo grafico, mentre $O = (0, 0)$ sia punto di minimo relativo.

Quesito 5. Stabilisci quante sono le soluzioni dell'equazione:

$$2^{x^3} = \frac{3}{\sqrt{|x|}} + 1$$

determina quindi, per ciascuna delle soluzioni trovate, un intervallo di ampiezza unitaria ed estremi interi che la contenga.

¹dove $f_{(1,-2)}(x) = x^4 - 2x^2$



Quesito 6. La trattoria “Va per storto” è frequentata da 100 clienti che vi pranzano e cenano regolarmente ogni giorno della settimana, a dispetto sia del nome poco raccomandabile, sia del cameriere, il quale è talmente scorbutico che il 20% degli avventori abituali ci ha litigato almeno una volta.

- i) Qual è la probabilità che in una tavolata a cui si sono seduti casualmente 7 clienti regolari nessuno di questi abbia mai litigato con il cameriere?
- ii) Qual è invece la probabilità che scegliendo a caso sette clienti abituali, uno in ciascun giorno della settimana, nessuno di questi abbia mai litigato con il cameriere?

Quesito 7. Dimostra che esiste un'unica soluzione reale $\tilde{x}$ dell'equazione

$$2^{x^2} = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

ricava poi un valore approssimato di $\tilde{x}$ con un errore inferiore a $\frac{1}{8}$.

Quesito 8. Considera una piramide regolare retta a base quadrata, le cui facce laterali siano triangoli equilateri; inscrivi una sfera nella piramide. Scegliendo a caso un punto interno alla piramide, qual è la probabilità che esso appartenga anche alla sfera?

1 ultimo guizzo ... per i curiosi

Problema 1. Nella figura 2 è disegnato un modello di una parte della famosa scala presente all'interno della cupola del Reichstag.

Ti viene chiesto di valutare le caratteristiche della scala, a tal fine, inizialmente, analizza il caso più semplice: la scala costruita esternamente ad un cilindro di raggio R (vedi figura 1)

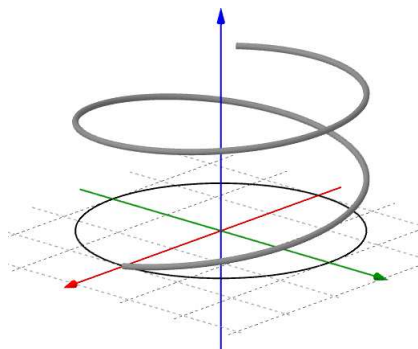


Figura 1: Modello di un tratto di scala costruita all'esterno di una superficie cilindrica

- 1) Dopo aver fatto le opportune ipotesi, scrivi l'equazione parametrica della scala;
- 2) calcola la lunghezza della scala, sapendo che sono necessari 8 giri per raggiungere la sommità (R raggio cilindro e h altezza cilindro noti).
- 3) una possibile equazione della scala del Reichstag è descritta dalla seguente equazione:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos\left(\frac{kt}{4h}\right) \cos(kt) \\ y(t) = R \cos\left(\frac{kt}{4h}\right) \sin(kt) \\ z(t) = R \sin\left(\frac{kt}{4h}\right) \end{cases} \quad (1)$$

- a) verifica l'equazione;
- b) descrivi la funzione dei parametri h e k .

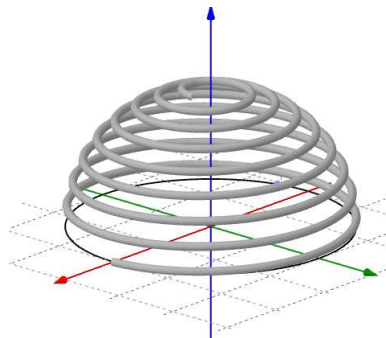
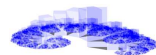
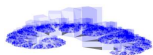


Figura 2: Modello della scala all'interno della cupola del Reichstag



Quesito 1. Ricava l'insieme delle primitive della funzione: $f(x) = \arcsin(x) \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

Quesito 2. Sezioni un tetraedro regolare con un piano parallelo ad uno dei suoi spigoli, detta $\mathcal{S}$, individua la posizione del piano per cui $\mathcal{S}$ ha superficie massima.

Quesito 3. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log(x))^\alpha}$ esiste.

Quesito 4. Sia ABC un triangolo si prolunghi ciascuno dei suoi lati di un segmento uguale al lato che si prolunga (²), si individua così un nuovo triangolo DEF . Calcola il rapporto $\frac{Area_{DEF}}{Area_{ABC}}$

²si prolunga AB di un segmento $BD = AB$, si prolunga BC di un segmento $CE = BC$ e si prolunga CA di un segmento $AF = CA$,