

Problema 1. Data la funzione $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

- 1) Studia la funzione e traccia il grafico $\mathcal{G}_f$.
- 2) Calcola l'equazione della tangente t a $\mathcal{G}_f$ nel punto T di ascissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- 3) Spiega perché f non è invertibile nell'intervallo $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, mentre è invertibile nell'intervallo $I = \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.
- 4) Sia t' la tangente a $\mathcal{G}_f$ nel punto T' di ascissa $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Dopo aver ricavato una primitiva di f , calcola l'area della regione finita di piano compresa fra $\mathcal{G}_f$ e le due tangenti t, t' .
- 5) Ricava la legge della funzione g inversa di $\tilde{f} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1)$.⁽¹⁾

Quesito 1. Ricava le dimensioni del cilindro retto di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R .

Quesito 2. Un mazzo di “tarocchi”⁽²⁾ è costituito da 78 carte: 22 carte figurate, dette “Arcani maggiori”, 14 carte di bastoni, 14 di coppe, 14 di spade e 14 di denari. Estrahendo a caso da tale mazzo, l'una dopo l'altra con reinserimento, 4 carte, qual è la probabilità che almeno una di esse sia un “Arcano maggiore”?

Quesito 3. Dati i punti $A = (2, 1, -1)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (1, -1, 2)$ e $D = (-3, 0, 0)$, scrivi in forma parametrica le equazioni delle rette AB e CD , verifica che sono sghembe, calcola la loro minima distanza.

1 Risolvi uno dei due problemi seguenti

Problema 1. Considera la famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = (x^3 - kx)e^{-kx^2}$$

- a) dimostra che tutte le $f_k \forall k \in \mathbb{R}$ sono dispari;
- b) dimostra che tutte le $f'_k \forall k \in \mathbb{R}$ sono pari;
- c) dimostra che tutte le $f_k \forall k \in \mathbb{R}$ hanno un flesso nell'origine del sistema di riferimento;
- d) studia la funzione

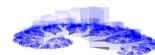
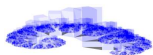
$$f_1(x) = (x^3 - x)e^{-x}$$

- e) calcola

$$\int_0^{+\infty} |f_1(x)| dx$$

¹ $\tilde{f}$ è la funzione f ristretta a $\mathbb{R}_0^+$





Problema 2. Il paraboloide $\mathcal{P}$ in figura 1 ha equazione $z = a(x^2 + y^2)$, ricava il valore di a sapendo che il suo fuoco è nel punto di coordinate $(0, 0, 2)$.

Il paraboloide viene, internamente ricoperto da un bagno d'argento, per renderlo riflettente. Sapendo che il bagno d'argento ha uno spessore di $10\mu m$, il paraboloide, di equazione $z = a(x^2 + y^2)$, ha diametro $2m$ ed è profondo $40cm$. Calcolare il costo del bagno d'argento (densità argento: $10500 \frac{kg}{m^3}$, costo dell'argento 16.5 € al grammo).

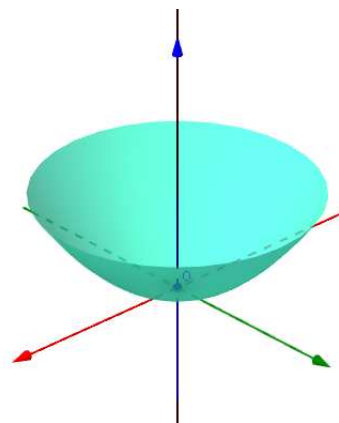


Figura 1: La superficie $\mathcal{P}$

2 Risolvi almeno tre dei seguenti quesiti

Quesito 1. Si scrivono su 11 foglietti di carta le lettere della parola **ABRACADABRA**, una per foglietto, e le si pongono in un contenitore. Si estraggono poi, a caso, i foglietti.

Qual è la probabilità che le lettere, nell'ordine estratto, diano di nuovo la stessa parola?

Quesito 2. Il numero di meteoriti che colpisce un satellite durante ogni sua orbita si distribuisce come una variabile casuale di Poisson di parametro λ . Nel compiere la sua orbita il satellite impiega 1 giorno, ed è mediamente colpito da 3 meteoriti.

Calcola la probabilità che nel percorrere 5 orbite il numero di meteoriti che colpiscono il satellite sia minore o uguale a 3.

Quesito 3. Quante sono le sfere di raggio uguale a 5 la cui sezione con il piano $z = 3$ è la circonferenza di centro $O = (1, 1, 3)$ e raggio uguale a 3?

Calcola le equazioni cartesiane.

Quesito 4. Determinare centro e raggio della circonferenza: $\mathcal{C} : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

Per quali valori di h il piano $x + y + z = h + 1$ interseca la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ in una circonferenza?

Quesito 5. Sia $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{4+x^2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ Determina la primitiva di f che si annulla per $x = 0$.

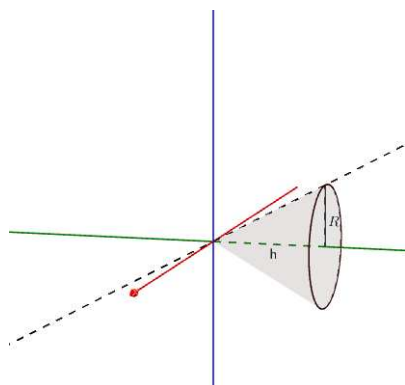


Figura 2

Quesito 6. Dimostra, utilizzando il calcolo integrale, che il volume di un cono è $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Vedi figura 2