

Problema 1. Studia la funzione $f(x) = xe^{-x}$.

- a) Traccia il grafico $\mathcal{G}_f$;
- b) calcola l'equazione della primitiva F di f tale che $F(0) = 0$

Problema 2. Calcola i seguenti integrali:

- i) $\int \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1} dx$;
- iii) $\int \frac{\log(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$;
- ii) $\int \frac{x + 4}{x^2 + 3x - 4} dx$;
- iv) $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

Quesito 1. In un contenitore ci sono 30 dadi (6 facce), 10 sono regolari, i restanti, hanno 3 facce con tre punti, 2 facce con sei punti e una faccia con 4 punti.

Pesco a caso un dado lo lancio qual è la probabilità di ottenere 3? Se ottengo 3 qual è la probabilità che il dado sia regolare?

Quesito 2. Alle seguenti funzioni è possibile applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo specificato?

- i) $l_0(x) = \frac{|\cos(x)|}{\cos(x)} x^2$ su $[-\pi, \pi]$
- iii) $l_2 = x^4 - \sqrt[3]{x}$ su $\left[0, \frac{3}{2}\right]$
- ii) $l_1 = x^3 - \sqrt[3]{x}$ su $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$
- iv) $l_3(x) = |\cos(x)| x^2$ su $[1, 2]$
- v) $l_4(x) = |\cos(x)| x^3$ su $[-1, 1]$

Per ogni funzione verifica se le ipotesi del teorema sono soddisfatte, e qualora lo siano calcola c .

Quesito 3. Dato il punto $P_0 = (-1, 0, 1)$ e il piano $\pi : x + y + z - 2 = 0$, determina:

- a) Le equazioni parametriche della retta r passante per P_0 e ortogonale a π .
- b) La proiezione ortogonale di P_0 su π .
- c) La distanza di P_0 da π .

Problema 3. Sia (u_n) la successione così definita:

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n - \log(u_n^2 + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- i) Dimostra che, per ogni $n \geq 0$, $u_n \in [0, 1]$.
- ii) Dimostra che la successione (u_n) è convergente e calcola il limite.

1 Una funzione per iniziare

Problema 1. Studia la funzione:

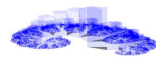
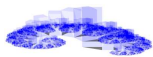
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

Analizza il comportamento della derivata prima nei punti di ascissa 0 e 1.

2 Un po' di integrali per continuare

Problema 2. Risolvi i seguenti integrali indefiniti:

- i) $\int \frac{x-3}{x-1} dx$;
- ii) $\int \frac{x}{x^2 - x + 1} dx$;



iii) $\int x \sin(x) dx;$

v) $\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{2025 + e^x}} dx;$

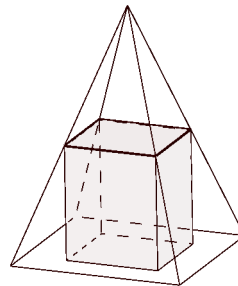
iv) $\int \frac{\log x}{x} dx;$

vi) $\int x^3 e^{-x^2} dx.$

3 Quesiti per finire

Quesito 1. Dimostra che una funzione monotona crescente è misurabile secondo Riemann-Stieltjes.

Quesito 2. Sia $\mathcal{P}$ la piramide retta avente per base il quadrato di lato ℓ e altezza $h = 2\ell$. Ricava le dimensioni del prisma inscritto nella piramide di volume massimo.



Quesito 3. Data la circonferenza di equazione: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases}$ calcola:

- a) la distanza fra il centro della circonferenza e il centro della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$;
- b) l'equazione parametrica della retta tangente alla circonferenza nel punto di coordinate $(0, 0, -2)$.