

Quesito 1. Una sfera omogenea⁽¹⁾ di massa m e raggio R , rotola senza strisciare con una velocità angolare ω . Nell'istante $t = 0$ inizia a salire, rotolando senza strisciare, lungo un piano inclinato di un angolo ϑ . Ricava quanto spazio percorre lungo il piano inclinato.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 2. Risolvi il quesito 1 utilizzando i seguenti dati:

- $m = 200 \text{ g}$;
- $R = 5 \text{ cm}$;
- $\omega = 200$ giri al minuto;
- $\vartheta = \frac{\pi}{6}$.

.....

.....

Quesito 3. Dopo aver spiegato cos'è il momento angolare, indica le condizioni in cui questa grandezza si conserva.

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 4. Descrivi in non più di 100 parole l'attività che hai sviluppato con il tuo gruppo sabato 8 febbraio e lunedì 10 febbraio.

.....

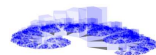
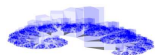
.....

.....

.....

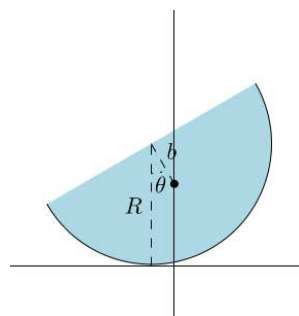
.....

¹ $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$

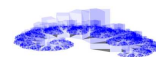
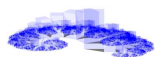


Problema 1. La metà di un cilindro omogeneo di raggio R , massa M e altezza h è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Calcola la frequenza^(a) delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

^aricordati, il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e la frequenza $\nu = \frac{1}{T}$



Quesito 5. Indica una traccia di soluzione del problema 1, in particolare: indica quali sono i dati del problema e cosa ti viene richiesto, riporta le leggi fisiche che ritieni utili per la soluzione.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1 *MateTeoria*

Quesito 1. Dimostra che il numero complesso $u = 1$ è l'elemento neutro del prodotto fra numeri complessi.

Quesito 2. Come è definito l'argomento principale di un numero complesso $z = x + iy$.

Quesito 3. Spiega come si calcola la distanza punto retta nella geometria Taxi.

Quesito 4. Come è definita la funzione $\arcsin(x)$.

Quesito 5. Ricava la formula del cambiamento di base dei logaritmi:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Quesito 6. Perché è così importante la base e negli esponenziali?

2

Quesito 7. Nel periodo natalizio tre ragazzi lavorano in un grande magazzino per impacchettare i regali. Riccardo prepara il 40% dei pacchetti, Elena impacchetta il 38% dei regali e Giovanni prepara i pacchi rimanenti. Sappiamo che la probabilità che un pacco preparato da Riccardo abbia l'etichetta del prezzo è 0.76%, la probabilità che un pacco preparato da Elena non abbia l'etichetta del prezzo è 98.76%, infine la probabilità che un pacco preparato da Giovanni non abbia l'etichetta del prezzo è 96%.

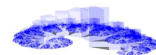
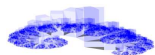
- a) Qual è la probabilità che ad un regalo acquistato ed impacchettato in questo grande magazzino non sia stata tolta l'etichetta del prezzo?

Si supponga che un cliente scopra che ad un regalo da lui fatto ad amici ed impacchettato nel grande magazzino, non era stata tolta l'etichetta del prezzo.

- b) Qual è la probabilità che quel pacco sia stato impacchettato da Riccardo?

3 *MatePratica*

Problema 1. Scrivi in forma trigonometrica (o se preferisci in forma polare) i seguenti numeri complessi:



- a) $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$;
 b) $z_2 = 2025 - 2025i$;
 c) $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.
 d) $z_4 = \sum_{k=0}^{2025} i^k$.

Problema 2. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

- a) $\frac{x^3 - x^2}{x^4 - 3x^2 + 4} \leq 0$;
 b) $\log_8 x - \log_{\frac{1}{8}} x^2 \geq 1$;
 c) $\left(\frac{9}{25}\right)^x - 3\left(\frac{3}{5}\right)^x \leq 4$;
 d) $\frac{1 - \operatorname{tg}^3(x)}{\operatorname{tg}^2(x) - 3\operatorname{tg}(x) - 4} \leq 0$;
 e) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) \geq \sqrt{3}$.

Problema 3. Disegna la taxiEllisse di fuochi $F_1 = (-2, -1)$ ed $F_2 = (2, 1)$ a cui appartiene il punto $A = (4, 0)$

Problema 4. Dimostra che, in un triangolo isoscele ABC , la bisettrice di uno dei due angoli adiacenti al vertice $\hat{A}$ è parallela alla base BC .

Quesito 8. Dopo aver verificato che la tangente al grafico $\mathcal{G}_f$ della funzione $f(x) = x - x^3$ nel suo punto T di ascissa nulla è la retta $r : y = x$, calcola l'equazione delle circonferenze tangenti in T ad r aventi il centro su $\mathcal{G}_f$.

4 Se avanza tempo e ... comunque per casa

Problema 5. Siano a e b due interi relativi ($a, b \in \mathbb{Z}$), definiamo $q(a, b)$ il numero $a^2 - ab + b^2$. Un intero n è definito numero di Eisenstein se esistono a e b tali che n può essere scritto nella forma $n = q(a, b)$.

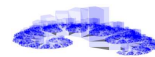
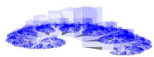
I numeri di Eisenstein sono stati studiati dal matematico tedesco Gotthold Eisenstein (1823-1852).

- Calcola $q(0, 0)$; $q(0, 1)$; $q(0, 2)$; $q(1, 1)$; $q(1, 2)$; $q(-1, 1)$ e $q(-1, 2)$.
- Ricava che 49 e 91 sono numeri di Eisenstein.
- Ricava che se m è un intero allora m^2 e $3m^2$ sono numeri di Eisenstein.
- Ricava che se n è un numero di Eisenstein, allora anche $4n$ è un numero di Eisenstein.
- Dimostra l'uguaglianza $a^2 - ab + b^2 = \frac{(2a - b)^2 + 3b^2}{4}$. Ricava, inoltre, che i numeri di Eisenstein sono tutti positivi.
Dimostra che 2 non è un numero di Eisenstein.
- Costruisci, un algoritmo che permette di scrivere tutti i numeri di Eisenstein compresi fra 0 ed n . Applica l'algoritmo per ottenere la lista dei numeri di Eisenstein compresi fra 0 e 25.
- Dimostra che se n è un intero allora $3n - 1$ non è un numero di Eisenstein.
- Dimostra che il prodotto di due numeri di Eisenstein è un numero di Eisenstein.
- Dimostra che se n è un multiplo di 9, allora n è un numero di Eisenstein se e solo se $\frac{n}{3}$ è pure un numero di Eisenstein.

Francia (olympiades nationales de mathématiques pour l'année 2019, Grenoble)

5 Disequazioni quasi senza numeri

- i) $\mathcal{I}_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in (-\infty, 2025)\} = (0, 2025)$
 $\frac{2}{f(x)} + (f(x))^2 \leq 0$
 ii) $\mathcal{I}_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in (-2025, 2025)\} = (0, 1)$
 $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt[4]{f(x)}$



- iii) $\mathcal{I}_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in [-5, +\infty)\} = (-1, 0)$
 $\log_{|f(x)|} (f(x))^2 \geq 0$
- iv) $\mathcal{I}_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in (-\infty, +\infty)\} = (-\infty, 0)$
 $e^{f(x)} \leq |f(x)| + 1$
- v) $\mathcal{I}_f = \left\{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right\} = (-\infty, -1)$
 $\arcsin\left(\frac{1}{f(x)}\right) \geq 0$

6 Geometria

6.1 Analitica

Problema 1. Calcola l'equazione della parabola che interseca l'asse delle ascisse in $x = -1$ ed è tangente nel punto $A = (1, 1)$ alla circonferenza Γ di centro l'origine.

Problema 2. Calcola $a, b > 0$ dell'ellisse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$. Sapendo che la trasformazione:

$$\tau : \begin{cases} X = 2x \\ Y = \frac{y}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ è tale che } \tau(\mathcal{E}) = \Upsilon, \text{ dove } \Upsilon : X^2 + Y^2 = 5$$

6.2 Sintetica

Problema 3. Nel triangolo ABC si ha $\hat{A} = 2\hat{B}$. Preso un punto D di AB , si prolunghi CA , dalla parte di A del segmento $AE = AD$. Congiunto E con D , sia F il punto comune alle rette ED e CB . Dimostra che sono uguali gli angoli $\hat{ABC}$ e $\hat{AED}$, e così pure $\hat{DFC}$ e $\hat{CAB}$

7 Physics

Problema 4. A uniform disc of radius $R = 20 \text{ cm}$ has a round cut as shown in Fig. 1. The mass of the remaining (shaded) portion of the disc equals $m = 7.3 \text{ kg}$. Find the moment of inertia of such a disc relative to the axis passing through its centre of inertia and perpendicular to the plane of the disc.

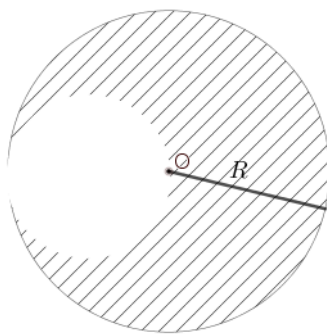
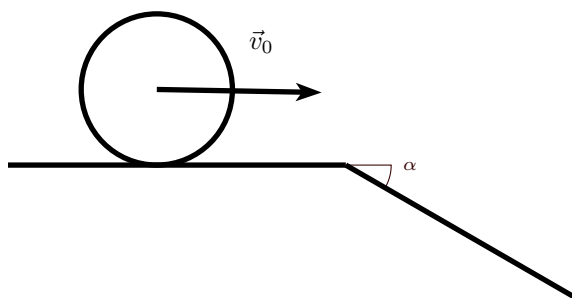
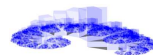
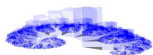


Figura 1: A uniform disc

Problema 5. A uniform solid cylinder of radius $R = 15 \text{ cm}$ rolls over a horizontal plane passing into an inclined plane forming an angle $\alpha = 30^\circ$ with the horizontal. Find the maximum value of the velocity v_0 which still permits the cylinder to roll onto the inclined plane section without a jump. The sliding is assumed to be absent.



8 Funzioni

Disegna il grafico:

- $f_{p_3}(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$
- $f_{p_5}(x) = \log\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right)$
- $f_{p_{11}}(x) = \arctg\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right) + \frac{\pi}{2}$

9 Per finire ... teoremino

Sappiamo che $z = x + iy = |z|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ dove $\vartheta = \arg(z) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ o $\arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$.

Teorema 1. *Dimostra che gli $u \in \mathbb{C}$ unitari, per i quali $\frac{\arg(u)}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, hanno solo un numero finito di potenze distinte.*