

1 Ripasso

1.1 Operazioni

Somma
18+59

somma con +

Prodotto
18*59

somma con *

s = 18+59

assegnazione ad una
variabile

e = s**p

potenza con **



1.2 Operazioni più “fini” uso di

Carichiamo la libreria **from sympy import ***
init_printing()

1.2.1 Radici

Primo modo **r1 = root(-8,3)**
r1

Secondo modo **r2 = real_root(-8,3)**
r2

1.2.2 Funzioni

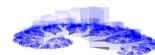
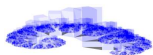
Definire una funzione **def f(x) :**
return x2-4*x**

Visualizzare la funzione **x = symbols('x')**
f(x)

“Graficare” la funzione **Gf = plot(f(x), (x,-1,5), show = False)**
Gf.show()

“Graficare” più funzioni **[...]**
Gf.append(Gf1[0])
Gf.show()

Esercizio 1. Disegnare la parabola che passa per $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$ ed ha per asse la retta $x = -2$ e la retta tangente alla parabola in B .



1.3 Disequazioni

assegnare ad una variabile una disequazione e, poi visualizzarla

$$\text{dis1} = (x^2 - 3x) / (x^2 - 4) \geq 3$$

far risolvere la disequazione

```
solve_univariate_inequality(dis1, x, relational=False)
```

1.3.1 La libreria random

import random Con l'uso della libreria random generiamo due coefficienti casuali a e b , così possiamo avere la “nostra” disequazione.

```
a = random.randint(-5,8)
b = random.randint(-3,5)
```

Esercizio 2. Risolvi con carta e penna la disequazione: $x - \sqrt{x+a} \geq b$ e poi verifica il risultato.

1.4 Disequazioni goniometriche

“costruire” la circonferenza goniometrica e poi visualizzare l'equazione

```
y = symbols('y')
CircG = Eq(x**2+y**2,1)
CircG
```

Disegnare la circonferenza goniometrica

```
GcG = plot_implicit(CircG, (x, -1.5, 1.5), (y, -1.5, 1.5), show = False)
GcG.aspect_ratio = (1,1)
GcG.show()
```

Esercizio 3. Prima costruisci la soluzione grafica e poi quella algebrica:

- i) $2 \cos(x) - \sqrt{3} \leq 0$
- ii) $\sin(x) \geq \frac{1}{3}$
- iii) $\cos(x) (2 \sin(x) - \sqrt{2}) \leq 0$
- iv) $2 \cos^2(x) - 1 \geq 0$
- v) $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) \leq 1$

Esercizio 4 (Extra). Prima soluzione grafica e poi algebrica:

- i) $\sqrt[3]{x-1} \leq x+1$
- ii) $\sqrt{x-1} \geq x+1$
- iii) $\cos^2(x) - \sin^2(x) \leq 0$

Esercizio 5. Nel triangolo ABC l'angolo in $\widehat{B} = \frac{\pi}{6}$ e $\widehat{C} = x$. Determinare il valore di x In modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC , sia:

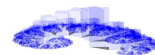
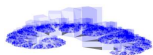
$$BC + HC = kAC \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\left(\text{Una soluzione } \frac{\sqrt{3}}{2} < k \leq 2 \text{ due soluzioni } 2 < k \leq \sqrt{7} \right)$$

Esercizio 6. In un cerchio di raggio r è data la corda AB , lato del triangolo equilatero inscritto. Inscrivere nel segmento circolare, che contiene il centro, un triangolo isoscele CDE , con la base CD parallela alla corda AB , in modo che si abbia:

$$2CD + 3EH = 2kr \quad k \in \mathbb{R}^+$$

dove H è il piede dell'altezza del triangolo relativa alla base CD .



$$\left(\text{Una soluzione } 0 < k \leq \frac{9 + 4\sqrt{3}}{4} \right)$$

Esercizio 7. È data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e la semiretta tangente nel punto B e giacente nel medesimo semipiano della semicirconferenza rispetto alla retta AB . Determinare su questa tangente un punto P in modo che, detta Q l'ulteriore intersezione della retta AP con la semicirconferenza, si abbia :

$$2BQ + 3PQ = kBP \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$(\text{Una soluzione } 2 \leq k \leq 3 \text{ due soluzioni } 3 < k \leq \sqrt{13})$$

Esercizio 8. Nel triangolo acutangolo ABC è $H\hat{C}B = \frac{\pi}{3}$, essendo H il piede dell'altezza relativa al lato AB . Determinare l'angolo $H\hat{C}A$ in modo che sia:

$$AC + CB = k\sqrt{3}AB \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\left(\text{Una soluzione } \frac{3 + \sqrt{3}}{6} < k < 1 \right)$$

Esercizio 9. Dato il triangolo equilatero ABC , il cui lato misura ℓ , si determini sul lato BC un punto P in modo che, detta M l'intersezione della semiretta AP con la perpendicolare per B al lato AB , risulti:

$$AB^2 + BM^2 + MC^2 + CA^2 = k\ell^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\left(\text{Una soluzione } 3 < k \leq 6 \text{ due soluzioni } \frac{21}{8} \leq k \leq 3 \right)$$

Esercizio 10. In un triangolo ABC , l'angolo $\hat{B}$ è doppio dell'angolo $\hat{C}$. Sapendo che è $BC = a$, e che, dette BH e CL , rispettivamente, le altezze del triangolo uscenti dai vertici B e C , si ha:

$$BH^2 + CL^2 = ka^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\left(\text{Una soluzione } 0 < k \leq \frac{3}{2} \text{ due soluzioni } \frac{3}{2} < k \leq \frac{25}{16} \right)$$

Esercizio 11. Disegnata la parabola di equazione $y^2 = 3x + 4$, determinarne i punti che distano di un segmento lungo a punto $(1, 0)$. Discussione.

Supposto poi $a = \frac{\sqrt{85}}{4}$, verificare che i punti soluzione sono quattro e determinare l'area del quadrilatero convesso che li ha per vertici.

Esercizio 12. Scritta l'equazione della parabola di vertice $A = (4, 0)$, tangente in A all'asse x e passante per $B = (0, 2a)$, trovare i punti P del suo arco parabolico AB le cui distanze dagli assi coordinati abbiano per somma un segmento di misura ka .

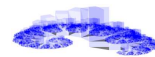
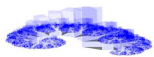
Esercizio 13. Sono date la circonferenza e le rette aventi equazioni $x^2 + y^2 = r^2$, $2y = -r\sqrt{3}$, $x = y\sqrt{3}$. Tali rette incontrano la circonferenza rispettivamente nei punti A , B e C , D . Detto k un numero positivo, si determini un punto P del segmento CD tale che si abbia:

$$AP^2 + PB^2 = kAB^2$$

Esercizio 14. Date le curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di rispettive equazioni:

$$y = -\frac{x^2 - a}{2} \quad y = \frac{b}{x}$$

si determini la relazione che deve sussistere fra a e b affinché esse si incontrino in un punto P_1 del primo di quadrante, avente per ascissa 2. Indicate con P_2 e P_3 le ulteriori intersezioni delle due curve e condotte per esse le tangenti alla $\mathcal{C}_2$, si denotino con T_2 e T_3 i punti di tali tangenti che hanno ordinata nulla e | o se ne calcolino le ascisse. Si determini infine a in modo che la distanza fra T_2 e T_3 sia $4k(a^{-2})$, essendo k un numero positivo dato.



Esercizio 15. Sono date le due parabole di equazioni:

$$y = 2x^2 + x + 1 \quad y = x^2 + 3x + 2$$

Detto $A = (-1, 0)$ uno dei due punti che esse hanno in comune e considerata una retta r passante per A e non parallela all'asse delle ordinate, siano:

- B l'ulteriore intersezione di r con la prima parabola,
- C l'ulteriore intersezione di r con la seconda parabola,
- D l'intersezione di r con l'asse delle ordinate.

Si determini il coefficiente angolare m di r in modo che risulti:

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{k}{AD} \quad k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 16. Dato il quadrante AOB di circonferenza di centro O e raggio r , si prenda sulla semiretta OA un segmento $AC = r$. Determinare sull'arco AB un punto P tale che l'area del quadrilatero $OCPB$ stia in rapporto uguale a $k \in \mathbb{R}^+$ con il quadrato del raggio.

Esercizio 17. Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC , l'angolo $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$. Determinare su BC un punto Q in modo che risulti:

$$AQ + QC = kAC \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 18. Data una circonferenza di centro O e raggio r e una sua corda AB tale che $\widehat{AOB} = \frac{2}{3}\pi$, si consideri un'altra corda CD parallela ad AB con C e D appartenenti al minore dei due archi AB , in modo che le dimensioni del rettangolo avente per lato CD ed il lato opposto su AB stiano tra loro nel rapporto $k \in \mathbb{R}^+$.

Esercizio 19. È data una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$. Condurre dal punto A due corde AC e AD in modo che $\widehat{COA} = \frac{\pi}{3}$ e sempre dal punto A , la semiretta AE tangente in A alla semicirconferenza. Determinare l'angolo $\widehat{EAC}$ in modo che risulti:

$$AC^2 + AD^2 = kr^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 20. Dato il triangolo equilatero ABC di lato a , condurre con centro in A la circonferenza di raggio $\frac{a}{2}$ che interseca il lato AB in M ed il lato AC in N . Determinare sull'arco MN interno al triangolo un punto P tale che:

$$PB = kPC \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 21. Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$ e centro O , si conduca una corda AC tale che $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{6}$. Se M è un punto di tale corda, determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{MBA}$ in modo che, detta PQ la corda della circonferenza di cui M è punto medio, si abbia:

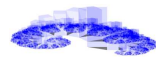
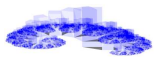
$$PQ^2 = 4kMB^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 22. Siano AB , BC , CD tre corde consecutive di una circonferenza di raggio r , di lunghezza rispettivamente r , $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2}$. Determinare sul minore dei due archi AD un punto M in modo che risulti:

$$AM^2 + MD^2 = kMC^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 23. In una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$ si considerino due punti C e D con C più vicino ad A , in modo che $\widehat{COD} = \frac{\pi}{3}$. Dette H e K le proiezioni di C e D sul diametro AB , determinare le posizioni di C e D in modo che si abbia:

$$HK = kCD \quad k \in \mathbb{R}^+$$



Problema 1. Un prisma retto ha due basi uguali e parallele $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E un punto dello spigolo AD tale che $DE = \frac{2}{3}AD$, sia, inoltre, F un punto preso sul prolungamento di $D'C'$, oltre C' , tale che $C'F = \frac{1}{2}D'C'$.

Dimostra che $A'C$ ed EF si incontrano in un punto G , e ricava $\frac{CG}{GA'}$ e $\frac{EG}{GF}$.

Problema 2. Il tetraedro $DABC$ ha vertice D e base ABC . Siano E , F e G i punti medi rispettivamente di BC , CA e AB si ha che DF e DG sono perpendicolari ad AC e AB e il triangolo ABC è rettangolo in A .

Dimostra che DE è perpendicolare al piano contenente la base ABC .

Problema 3. AB , BC e CD sono tre spigoli di un cubo di diagonale AD .

Ricava l'ampiezza dell'angolo diedro individuato dai piani BCD e ACD .