

Quesito 1. Dopo aver riportato la definizione di classe di equivalenza, spiega la seguente uguaglianza:

$$\frac{4}{5} = [(4, 5)] = \{(4, 5), (8, 10), (12, 15), \dots, (-4, -5), \dots\}$$

Quesito 2. Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. Ha senso scrivere $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$? Motiva la risposta.

Quesito 3. Data la funzione $f(n) = \frac{1}{n^2 - 2n + 1}$ con $n \in \mathbb{N}$ indica dominio e insieme delle immagini.

Quesito 4. La funzione $f : (-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ avente legge $f(x) = (x + 2)(x - 4)$ è invertibile?

Problema 1. Date le rette di equazione $r : y = \sqrt{3}x + 1$ e $s : x + y - 3 = 0$, ricava:

- le coordinate del punto $A = r \cap s$;
- quale fra r ed s forma con l'asse delle ascisse l'angolo acuto di maggiore ampiezza.

Quesito 5. Spiega perché $\sqrt{3}$ è irrazionale

Problema 2. Razionalizza:

a) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 4}^{(1)}$$

Quesito 6. Calcola la somma e il prodotto delle radici dell'equazione $x^2 - 5x + 7 = 0$.

Problema 3. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $(x - 3)(x - 2)(x^4 + 1)(x^3 + 8) \geq 0$

c) $\frac{x-1}{x^2-3x-4} \geq 0$

$$\text{b) } \frac{x+1}{x-1} \leq 0$$

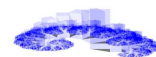
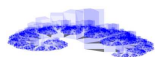
d) $\frac{13}{x+4} \leq \frac{15}{2x-3}$

Problema 4. In un triangolo isoscele, l'angolo al vertice è la decima parte dell'angolo giro. Verifica che la bisettrice di un angolo alla base divide il triangolo in due triangoli entrambi isosceli.

Problema 5. Per il vertice B di un triangolo ABC (in cui $\hat{A} < \hat{B}$) conduci una retta che taglia in D il lato AC in modo che sia $C\hat{B}D = C\hat{A}B$. Dimostra che $BC^2 = CD \cdot CA$.

Problema 6. Determina l'altezza di un rettangolo di data base b sapendo che è equivalente da un quadrato di lato a .

¹Se avanza tempo e ... comunque per casa



3 Pensa e ... costruisci

Descrivi con cura il procedimento seguito

Quesito 7. Utilizzando riga (non numerata) e compasso, costruisci un segmento di lunghezza $\sqrt{7}$



Figura 1: Geogebra "minimale"

Che in Geogebra (vedi figura 1), sarebbe come utilizzare solo: punto, retta e circonferenza centro punto

Problema 7. Dato un triangolo isoscele ABC di base AB , determina il punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC .

Problema 8. Costruisci un triangolo noti i suoi punti medi M_1, M_2, M_3 .

4 Problema finale

Descrivi con cura il procedimento seguito

Problema 9. In figura 2 è riportato un triangolo ABC sui lati del quale sono stati costruiti tre quadrati. Dimostra che i tre triangoli colorati sono equivalenti.^(a)

^aSe avanza tempo e ... comunque per casa

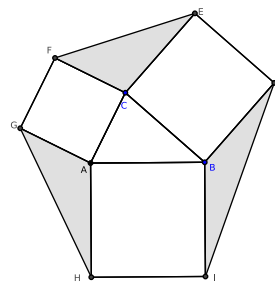


Figura 2: Il triangolo ABC ed i quadrati esterni

Pensierino: Oggi lo studio della geometria è presto dirottato su metodi analitici e si dà spesso la sensazione che con i metodi sintetici si possano ottenere solo risultati elementari. Può essere quindi utile analizzare alcune dimostrazioni puramente sintetiche, risalenti a periodi diversi, che mostrano come il metodo sintetico usato con intelligenza possa essere ben più versatile e potente di quanto appaia dagli attuali programmi scolastici.

Quesito 1. Ricava che il vettore accelerazione centripeta, in un moto circolare uniforme, ha la stessa direzione del vettore posizione ma verso opposto.

.....

.....

.....

.....

.....

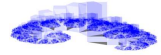
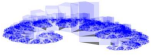
.....

.....

.....

.....

.....



Quesito 2. Ricava la traiettoria del moto di una massa m lanciata dal suolo con un'inclinazione di α radianti, ed una velocità $|\vec{v}| = v_0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Problema 1. Willy Coyote si accorge di avere un burrone davanti a sé ad una distanza $D = 25 \text{ m}$. Sapendo che stava correndo alla velocità $v_0 = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ e che inizia a rallentare con una decelerazione $a = 1.15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

- a) verifica che si ferma prima di cadere, determina l'istante t in cui si ferma e la distanza d dal bordo del burrone.

Se decide di rallentare a soli 5 m dal burrone,

- b) calcola l'accelerazione necessaria per fermarsi.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

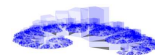
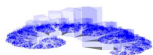
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Problema 1. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

i) $2 \sin(x) - 1 \geq 0$

iii) $|x + 1| - |x| \geq 1$

ii) $\sin^2(x) - 2 \sin(2x) \leq 0$

iv) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq 1 + x$

Problema 2. Dati nel piano xOy i punti $A = (1, 1)$ $B = (3, 1)$ e la retta $t: 3y + 2x = 9$

i) calcola l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ passante per A e tangente in B a t ;

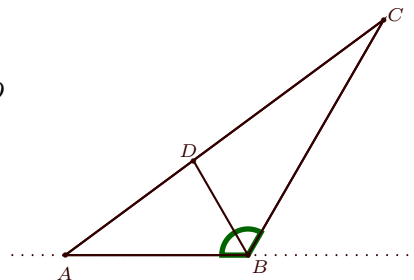
ii) calcola l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per A e tangente in B a t ;

iii) in quanti punti si incontrano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$? Motiva la risposta.

Quesito 1. Data la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + x^3$ calcola l'equazione della tangente nel suo punto di ascissa $x = 1$.

Problema 3. Sia ABC il triangolo in cui $\widehat{ABC} = \frac{2}{3}\pi$ e detta BD la bisettrice di $\widehat{ABC}$ dimostra che:

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{BA}$$



Problema 4. Sapendo che $f(x)$ è definita nell'intervallo $I = [0, 4]$ e per ogni $x \in I$ si ha $2 \leq f(x) \leq 4$, risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni

i) $\sqrt{f(x)} \geq 1$

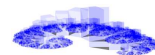
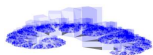
ii) $\frac{1}{1 - \sqrt{f(x)}} \leq 0$

iii) $|f(x)| + |2 - f(x)| - |f(x) - 1| \geq 0$

Motiva le risposte.

Quesito 2. Dopo aver dimostrato che $\forall P = (x_1, y_1) \neq (0, 0)$ l'elemento simmetrico rispetto l'operazione di prodotto fra punti (puntino⁽¹⁾) è $P' = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, -\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right)$, verifica che la retta $y = x + 4$ viene trasformata, dall'applicazione che ad ogni suo punto P associa il simmetrico P' , in una circonferenza, di cui si chiede di calcolare centro e raggio.

¹ $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1), (x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$



Quesito 3. In figura 3 è rappresentata la parabola $\mathcal{P}$ e la sua direttrice d :

- spiega perché $\mathcal{P}$ è definita “curva implicita”?
- se la direttrice di $\mathcal{P}$ è inclinata di $\frac{\pi}{4}$, sapresti indicare una possibile equazione di $\mathcal{P}$.

Motiva le risposte.

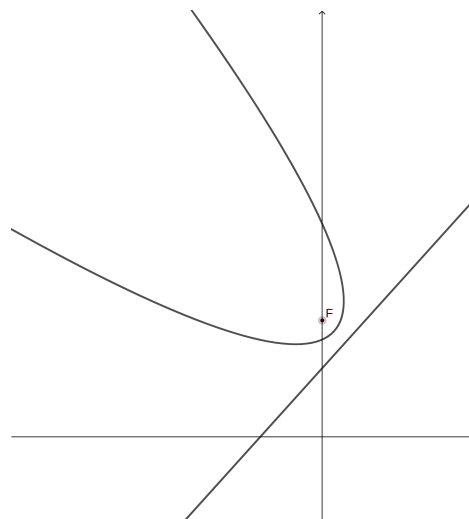


Figura 3: Parabola $\mathcal{P}$

Quesito 4. Dimostra che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale la formula:

$$\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Problema 1. Risolvi in $\mathbb{D}$ le seguenti disequazioni:

- $\operatorname{tg}(x) > 1 \quad \mathbb{D} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$
- $\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) > 1 \quad \mathbb{D} = (0, 2\pi);$
- $\sqrt{x^2 - 4} > 2 - x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R};$
- $\frac{|x+1| + x - 5}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}} \leq 0 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}.$

Problema 2. Determina l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse parallelo all'asse delle ordinate che passa per $A = (0, 5)$, $B = (-1, 0)$ e $C = (5, 0)$. Calcola l'equazione della tangente a $\mathcal{P}$ in A .

Problema 3. Calcola l'equazione della circonferenza Γ di diametro AB , dove $A = (0, 5)$, $B = (-1, 0)$.

Problema 4. Dato il triangolo acutangolo ABC , traccia le altezze AH e BK , dimostra che il quadrilatero $ABHK$ è ciclico.⁽¹⁾

Quesito 1. Dimostra che

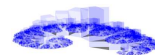
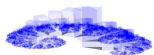
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Questo risultato cosa ci permette di confermare?

Quesito 2. Scrivi una possibile equazione della parabola il cui asse è parallelo alla retta $y = 2025x - 2024$

Quesito 3. Sia $P = \left(\frac{9}{20}, \frac{9\sqrt{3}}{20}\right)$, se definiamo $P^2 = P \cdot P$ dove, al solito “ $\cdot$ ” è l'operazione puntino. Cosa restituisce P^6 ? Non serve svolgere i calcoli, è sufficiente descrivere il risultato.

¹ciclico, si dovrebbe sapere, significa inscritto in una circonferenza



Quesito 4. Spiega perché la seguente equazione, $x^2 + 3xy + 9y^2 - x - y = 0$, ha come curva rappresentativa un'ellisse (vedi figura 4).

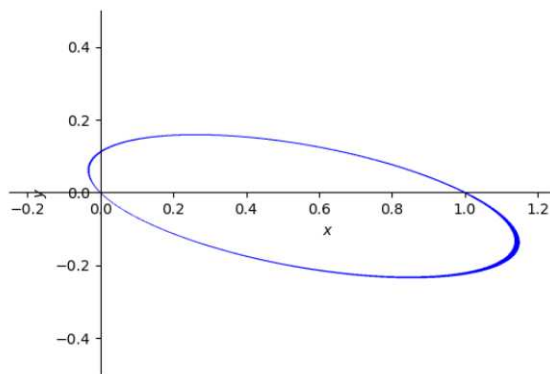
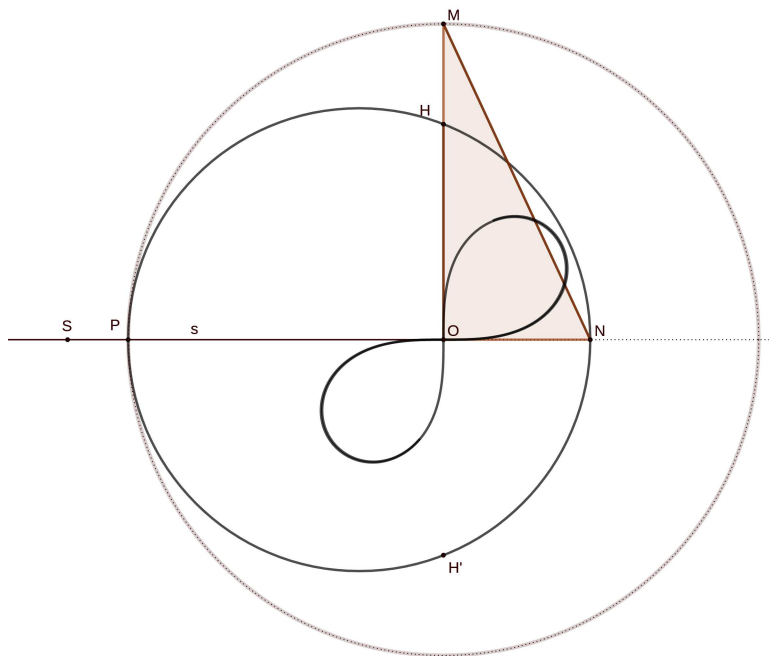


Figura 4

Se avanza tempo e comunque per casa

Problema 5. Sia OH un segmento fissato, sulla semiretta $s = OS$ si prenda un punto $P \in s$, si costruisca, ora, la circonferenza Γ per i punti H , P e H' dove H' è il simmetrico di H rispetto ad O . Sia N , l'ulteriore intersezione di Γ con la retta PO . Si costruisca la circonferenza Γ' di centro O e raggio OP sia M l'intersezione di Γ' con la semiretta OH .

Il triangolo ONM , al variare della posizione di $P \in s$ ha area costante. Spiegane la ragione e indica quanto vale l'area di ONM .



Vero finto compito di ottobre

Disequazioni

Problema 1. Risolvi nell'insieme indicato le seguenti disequazioni:

a) $\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x < 0 \quad x \in [0, 2\pi]$

b) $|\operatorname{tg} x| < 1 \quad x \in [0, 2\pi]$

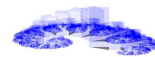
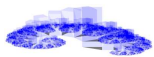
c) $\frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \leq 0 \quad x \in [0, 2\pi]$

d) $6 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \geq 0 \quad x \in [0, 2\pi]$

e) $\frac{\sqrt[3]{x^3 - 1} + x}{\sqrt{x - 1} + x + 1} \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

f) $\sqrt{x^2 + x + 1} \leq x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:



a) $\frac{x^3(x-1)^2}{x+3} \geq 0$

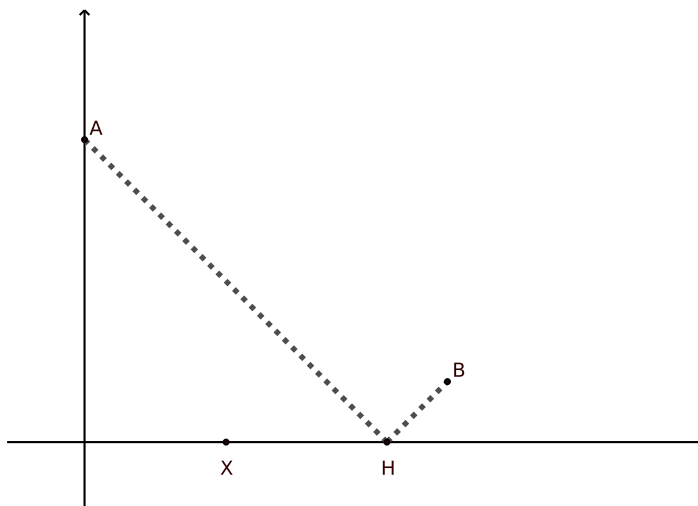
b) $\sqrt{x-1} - x \leq 2$

Geometria non solo analitica

Problema 2. In figura sono riportati i punti $A = (0, 5)$ e $B = (6, 1)$. Calcola le coordinate del punto H in modo tale che:

$$\overline{AH} + \overline{HB} \leq \overline{AX} + \overline{XB}$$

dove X è un generico punto dell'asse delle ascisse.



Problema 3. Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro l'origine e raggio 2. Sia A il punto di $\mathcal{C}$ di ascissa $\sqrt{2}$. Calcola l'equazione della parabola tangente alla circonferenza in A che passa per $B = (3\sqrt{2}, 0)$.⁽¹⁾

Problema 4. Sui lati di un triangolo equilatero ABC si costruiscano i triangoli equilateri ABD , BCE e CAF . Detti rispettivamente G, H, I i centri dei tre triangoli così costruiti, si dimostri che l'esagono $AGBHCI$ è regolare

Quesiti

Quesito 1. La parabola $\mathcal{P}$ di equazione $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 4\sqrt{3}x - 4y = 0$ ha l'asse che forma con l'asse delle ascisse un angolo acuto di $\frac{\pi}{6}$. Indica come puoi ottenere per $\mathcal{P}$, l'equazione nella forma $Y = aX^2 + bX + c$.

Quesito 2. Dimostra che $\sum_{k=1}^n (2k)^3 = 2n^2(n+1)^2$

Quesito 3. Quanti sono i numeri di quattro cifre che si possono costruire usando le cifre 0, 5, 7, 9:

- i) una sola volta;
- ii) anche più di una volta.

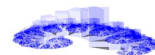
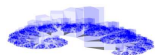
Quesito 4. Calcola il coefficiente angolare della retta tangente nel punto di ascissa $x = 1$ al grafico rappresentativo della curva di equazione: $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[5]{x^3}$

Quesito 5. Calcola l'equazione del luogo dei punti P per cui il rapporto fra la distanza dal punto $A = (0, -1)$ e dalla retta $r: y = 2$ sia la costante $e = \frac{1}{2}$.

Spiega perché il luogo ottenuto è una ellisse.

Quesito 6. Dimostra che l'operazione "." (puntino) è commutativa.

¹Imposta il sistema risolvibile, sviluppa i conti: se avanza tempo e comunque per casa



5 Applica e Pensa

Problema 1. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni, per quelle goniometriche scegli un opportuno intervallo.

1) $3^x - 4 \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 3;$

3) $\operatorname{tg}^2 x - (1 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3};$

4) $\cos x + \sin x \leq -1;$

2) $\sqrt{1-x^2} + x \leq 0;$

5) $\log_{\frac{1}{\pi}}^2(x) - 3 \log_{\frac{1}{\pi}}(x) \leq 0$

Problema 2. Dati $A = (0, -1)$, $B = (1, 2)$ e la retta $r : y = 2x$,

i) calcola l'equazione della parabola a cui appartengono A e B ed ha in B tangente r ;

ii) calcola l'equazione della circonferenza che passa per A e per B il cui diametro appartiene ad r .

Quesito 1. Calcola l'equazione della tangente al grafico della curva rappresentativa della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$ nel suo punto di ascissa 64.

Quesito 2. In un contenitore ci sono 30 gettoni numerati $(0, 1, 2, \dots, 29)$ ne estraggo contemporaneamente 5 quante sono le possibili cinquine che posso ottenere?

Quesito 3. Scrivi in forma trigonometrica le radici terze del numero complesso $w = \sqrt{2} \frac{4-4i}{|2-2i|} - 2$

6 Pensa e Applica

Problema 3. In un cerchio di centro O e raggio r conduci le corde AB ed AC , detti M_1 ed M_2 i punti, rispettivamente sugli archi AB ed AC , equidistanti dagli estremi degli archi stessi, traccia la corda M_1M_2 che incontra in H e K le corde AB ed AC . Dimostra che il triangolo AHK è isoscele.

Quesito 4. Determina i luoghi geometrici delle $z \in \mathbb{C}$ tali che:

$$\mathcal{L}_1 : \operatorname{Re}(7z - 8z^* - 3\operatorname{Im}(z) + z^2 + zz^*) = 0 \quad \mathcal{L}_2 : \begin{cases} |z(3+i)| \geq 2 \\ \operatorname{Re}(z^2 + 7i) - (\operatorname{Re}(z))^2 = 0. \end{cases}$$

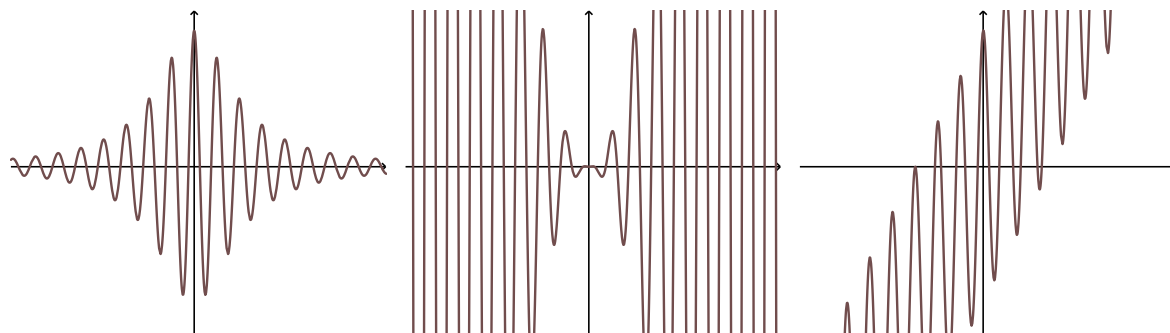
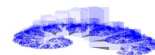
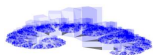
Quesito 5. Sapresti indicare cosa disegnano le seguenti linee di codice?

```
y = symbols('y')
GP = plot_implicit(y <= sqrt(x), (x, 0, 1), (y, 0, 1), show = False, line_color = '0.9')
GP1 = plot_implicit(y <= x**2, (x, 0, 1), (y, 0, 1), show = False, line_color = '1.0')
GP.append(GP1[0])
GP2 = plot(x**2, (x, 0, 1), show = False, line_color = '0.0')
GP.append(GP2[0])
GP3 = plot(sqrt(x), (x, 0, 1), show = False, line_color = '0.0')
GP.append(GP3[0])
GP.show()
```

7 Pensa

Quesito 6. Sia $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \cos(x)$.

i) Quale fra le seguenti curve è il grafico di f ? (motiva la risposta);



ii) f è periodica? (motiva la risposta);

7.1 Se avanza tempo e ... comunque per casa

Definizione 1. Si dice sezione aurea di un segmento la parte di esso che è media proporzionale fra l'intero segmento e la parte restante, φ è il rapporto fra l'intero segmento la sua sezione aurea.

Quesito 7. Ricava φ , verifica che $\varphi^2 = 1 + \varphi$ e poi scrivi una formula ricorsiva per φ^n .

Pensierino ... finale

$$\sqrt{\varphi + 2} - \varphi = \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{e^{-4\pi}} = 0.2840 \dots$$

$$1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \dots}}$$

Srinivasa Aiyangar Ramanujan

Per verificare che questa formula ha come risultato il valore approssimato scritto, è un mero gioco numerico, dimostrare che è vera, è matematica!

8 Problemi MateFis

8.1 Mate

Problema 1. Rappresenta in (xOy) le regioni di piano individuate dai seguenti sistemi:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - \sqrt{3}x \leq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \\ y - x \leq 1 \end{cases}$

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $\sqrt{1-x} < x+1;$

b) $|x+1| + x \geq \sqrt{4x-x^2};$

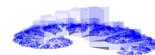
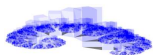
Risolvi in $[0, 2\pi]$ le seguenti disequazioni:

a) $\frac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)}{\operatorname{tg}(x) - 1} \leq 0;$

b) $\sin(x) - \cos(x) \leq 1;$

Problema 2. La parabola $\mathcal{P}$ è tangente in $A = (0, 2)$ alla retta $2y + x - 4 = 0$ e passa per $B = (2, 4)$. Calcola l'equazione della parabola.

Problema 3. Dimostra che in ogni triangolo ABC , detta AM la mediana per A si ha che le distanze di C e B dalla retta AM sono fra loro uguali.



8.2 Fis

Problema 4. Una massa M si muove a velocità costante v su un piano orizzontale liscio, dopo un tempo t_1 urta in modo anelastico una massa $m = \frac{M}{20}$. Calcola lo spazio percorso dalle due masse dopo che è trascorso un tempo $t_2 = t_1$ dall'impatto.

Problema 5. Sopra un carrello di massa M si trova una massa $m : 50m = M$, nell'istante t_0 la massa m in seguito ad un esplosione si stacca orizzontalmente al piano del carrello con velocità v . Calcola la velocità del carrello dopo l'esplosione.

9 Quesiti MateFis

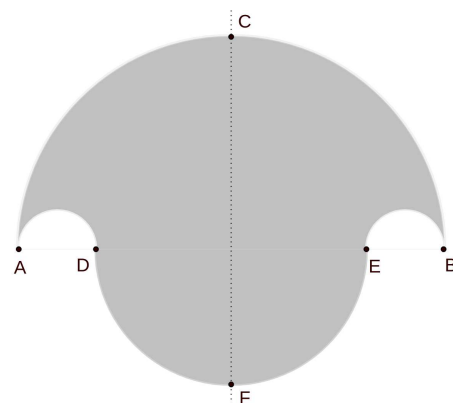
Quesito 1. Dimostra la seguente uguaglianza: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Quesito 2. Una pallina ruota a velocità angolare ω , in quanto è mantenuta in moto circolare uniforme da uno spago teso. Il piano in cui si muove la massa è parallelo al suolo.

Nell'istante t_{crash} si rompe il filo, descrivi il moto della massa nel tempo $t \geq t_{crash}$

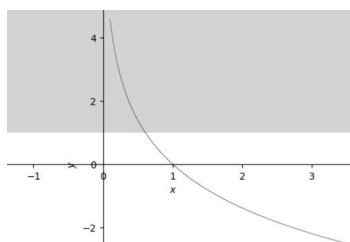
Quesito 3. Dimostra che $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Quesito 4. Sia AB un dato segmento e siano $D, E \in AB$, tali che $AD = EB$. Traccia il semicerchio Γ di diametro AB , ora con diametri AD ed EB traccia due semicerchi appartenenti al semipiano contenente Γ , infine, con diametro DE traccia un semicerchio non appartenente al semipiano contenente Γ . Dimostra che l'area della figura curvilinea qui di fianco rappresentata è uguale a quella del cerchio di diametro CF .



Quesito 5. Spiega i seguenti passaggi, aggiungendo, anche, eventuali passaggi mancanti:

$$\begin{aligned} \log_{e^{-1}}(x) - \log(x) &\geq 1 \\ \log_{e^{-1}}(x) + \log_{e^{-1}}(x) &\geq 1 \\ \log_{e^{-1}}(x^2) &\geq 1 \\ x^2 &\leq \frac{1}{e} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{e} \end{aligned}$$

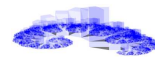
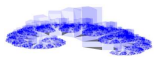


10 ... un po' di Python era prevedibile!

Quesito 6. Cosa restituisce questa sequenza di comandi?

```
def puntoesclamativo(n) :
    x = 1
    for k in range(1,n+1) :
        x = x*k
    return x

quesito3 = 0
for k in range(1,6) :
    quesito3 = quesito3 + k*puntoesclamativo(k)
quesito3
```



Problema 1. Risolvi le seguenti disequazioni:

- 1) $2 \sin^2(x) - \sin(x) < 0$; $x \in [0, 2\pi]$
- 2) $\operatorname{tg}^2(x) - (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg}(x) - \sqrt{3} < 0$; $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- 3) $\frac{|x-2| + |x+3|}{x^2 - 3x + 1} < 0$
- 4) $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{3}}(4x+6) \right) < 0$
- 5) $64 - 2 \cdot 3^x > 45 + 3^{2-x}$

Problema 2. Dato l'insieme $\Sigma_{\mathcal{P}_a}$ di parabole di equazione $ax^2 - 2(a-1)x - 2y + 1 + a = 0$:

- a) trova $\mathcal{P}_{-1} \in \Sigma_{\mathcal{P}_a}$ passante per il punto $A = (2, 2)$;
- b) determina le equazioni delle tangenti r ed s a $\mathcal{P}_{-1}$ nei punti O e B intersezione di $\mathcal{P}_{-1}$ con l'asse delle ascisse;
- c) scrivi l'equazione della circonferenza tangente alla parabola nei punti O e B ;

Problema 3. Nel triangolo ABC il vertice C è retto. Sia D il punto di AB per cui $BC = BD$ ed E il punto di AB per cui $AC = AE$.

Dimostra che DE è uguale alla somma dei segmenti di proiezione di D ed E rispettivamente su AC e BC

Quesito 1. Risolvi la seguente equazione $(z^*)^3 z^4 = -2z^2$ $z \in \mathbb{C}$.

Quesito 2. Dimostra che $|z^n| = |z|^n$.

Osservazione 1. $z = x + iy$, $z = |z|(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$, $z = (|z|, \vartheta)$.

Se $z, w \in \mathbb{C}$ si ha:

$$z \cdot w = (|z||w|, \vartheta + \varphi)$$

Quesito 3. Calcola il modulo e l'argomento principale dei seguenti numeri complessi:

$$z = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5}{(1-i)^7} \quad z = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^6}{(1-i\sqrt{3})^4}$$

11 Allenamento ... forse qualcosa già visto ... *repetita* ...

Problema 1. Disequazioni

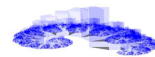
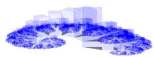
- 1) $2 \sin^2(x) - \sin(x) < 0$; $x \in [0, 2\pi]$
- 2) $9^{2x} - 5 \cdot 3^{2x} < 4$; $x \in [-\pi, \pi]$
- 3) $(*) \operatorname{tg} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \geq 1$; $x \in \mathbb{R}$
- 4) $\frac{x^2 + |x-2|}{|2+x| - x^2} < 0$
- 5) $\sqrt{x} + x - 3 > 0$

Problema 2. Fra le parabole $\mathcal{P}_a$ di equazione $y = ax^2 + bx + c$ determina quelle tangenti alla retta $2x - y - 3 = 0$ nel punto di ordinata 3. Individua quella passante per il punto $(1, 3)$. Calcola, in questo caso ($\mathcal{P}_1 : y = x^2 - 4x + 6$), le equazioni delle tangenti r ed s alla parabola mandate dal punto P della direttrice avente ascissa $\frac{19}{8}$;

Problema 3 (*). È data la seguente relazione: $x|x| - y^2 = -1$: determina dominio e codominio e costruisci il grafico.

Problema 4. Dato un triangolo acutangolo ABC , siano U e V i piedi delle altezze uscenti dai vertici A e B . Dimostrare che l'asse del segmento UV passa per il punto medio M di AB .

Problema 5. Sono date due circonferenze: Γ di centro O e raggio $2R$; Γ' di centro O' e raggio R , tangenti internamente in un punto A . Dimostrare che ogni retta t passante per O di Γ individua due archi AP e AP' di uguale lunghezza ($P \in \Gamma$ $P' \in \Gamma'$).



Quesito 1 (*). Calcola l'incremento della funzione: $k_3(x) = \sqrt[4]{\sin(\sqrt[3]{x^3 - 1})}$

Quesito 2. Dimostra che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n (3k(k-1) + 1) = n^3$$

Quesito 3. Un collezionista ha già raccolto 60 delle 100 figurine di un album. Egli acquista una busta contenete 24 figurine (tutte diverse). Quante figurine nuove (non doppie), in media, troverà nella busta?

Quesito 4. Dimostra:

$$\begin{array}{lll} \text{i) } (z^*)^* = z; & \text{iii) } (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*; & \text{v) } z z^* = |z|^2 \\ \text{ii) } (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*; & \text{iv) } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}; & \end{array}$$

Definizione 2. Un numero $n \in \mathbb{N}$ si dice perfetto se la somma dei suoi divisori (escluso il numero stesso) è uguale a n . O, in modo analogo, se la somma dei suoi divisori è $2n$.

6 è perfetto: i divisori di 6 sono 1, 2, 3, 6, $1 + 2 + 3 = 6$ o $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$.

Teorema 1. Sia $2^k - 1$ un numero primo¹⁾ allora $n = (2^k - 1) \cdot 2^{k-1}$ è perfetto.

Quesito 5 (*). Dimostra il teorema.

Quesito 1. Calcola la velocità angolare delle lancette di un orologio: ore, minuti, secondi.

Quesito 2. Un vagone ferroviario di massa 1 t si muove su un binario alla velocità di $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Un secondo vagone di massa doppia si muove sullo stesso binario in senso opposto. A seguito dell'urto i due vagoni si arrestano. A che velocità procedeva il secondo vagone. (Trascura gli attriti fra ruote e rotaie)

Quesito 3. Si legge spesso che un astronauta in un satellite "non ha peso". Non dovrebbe invece sentire una forza centrifuga in un'orbita circolare?

Problema 1. Un punto materiale di massa $m = 2.5\text{ kg}$ è attaccato all'estremo di una molla di costante elastica $k = 120 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ e lunghezza a riposo $r_0 = 30\text{ cm}$; l'altro estremo della molla è fissato al punto O. Il sistema si trova su di un piano orizzontale e ruota con velocità angolare costante $\omega = 4\text{ s}^{-1}$ attorno a O. Calcolare il raggio r della circonferenza descritta da m .

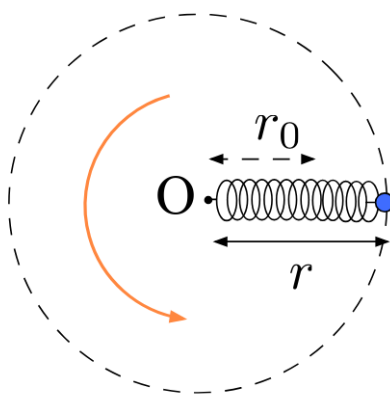


Figura 5

Problema 2. Due corpi (punti materiali) di massa $m_1 = 3\text{ kg}$ ed $m_2 = 5\text{ kg}$ sono collegati da una fune inestensibile e di massa trascurabile che passa attraverso una carrucola ideale di massa trascurabile. I corpi 1 e 2 poggiano, rispettivamente, su due piani inclinati di un angolo $\vartheta_1 = 65^\circ$ e $\vartheta_2 = 35^\circ$ rispetto alla direzione orizzontale, come rappresentato in Figura 6. I corpi si trovano entrambi ad una quota $h = 1.5\text{ m}$ da terra.

¹detto primo di Mersenne http://www.mersenne.org/report_milestones/

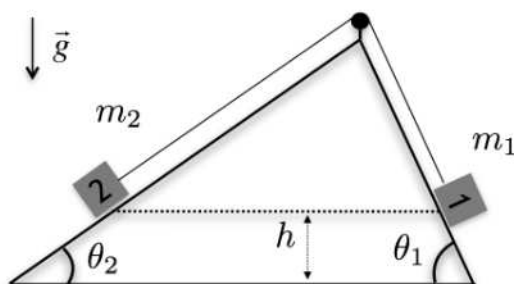
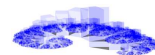
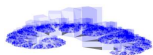


Figura 6

Determina il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s tra il corpo 2 ed il piano inclinato tale che il sistema resti fermo nella posizione iniziale.

Problema 3. Due bambini si trovano su due slitte poste su una superficie gelata (priva di attrito). Sono inizialmente fermi. Il primo bambino ha massa m_1 il secondo bambino ha massa m_2 , le due slitte sono identiche ed hanno massa m . Il primo bambino lancia, con velocità v una palla di massa m_3 verso il secondo bambino, il quale appena ricevuta la rilancia con la stessa velocità al primo bambino. Calcola le velocità dei due bambini.

12 Mate Le disequazioni non possono mancare

...è bisogna saperle risolvere!

Problema 1. Risolvi, in un opportuno sottoinsieme $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^{(1)}$, le seguenti disequazioni:

a) $\sqrt{2^{2x} + 1} > 2^x - 3$

c) $\log(\log x) < 1$

b) $\operatorname{tg}(x)(2 \cos(x) - 1) \leq 0$

d) $3^{x^2+1} - 3^{2x^2} + 4 \leq 0$

13 Fis Prob

Problema 2. Una massa M si muove su di un piano liscio orizzontale con velocità $\vec{v}$, una massa m la “insegue” con velocità in modulo $5|\vec{v}|$.

Nell'ipotesi che $m = \frac{1}{20}M$:

a) calcola la velocità delle due masse nel caso l'urto sia anelastico;

Dopo l'urto le due masse proseguono su di un piano orizzontale scabro ($\mu = 0.05$).

b) calcola dopo quanto tempo le due masse si fermano.

14 Mate Prob

Problema 3. Dimostra che un trapezio isoscele è sempre inscritto in una circonferenza.

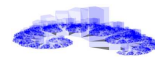
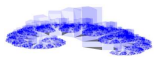
È vero per ogni quadrilatero?

Problema 4. Qual è la probabilità di ottenere 6 volte testa in 10 lanci, sapendo che la moneta utilizzata è “tarocca”, infatti la probabilità di uscita di croce è 0.85.

Problema 5. Scrivi in forma trigonometrica $\frac{1-i}{2\sqrt{3}+2i}$.

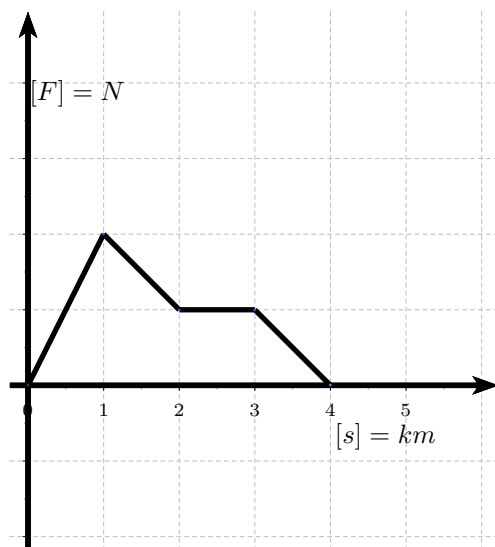
Ricava le z tali che $z^4 = 8 - 8i$.

¹L'insieme $\mathbb{D}$ deve essere specificato per ogni disequazione



15 Quesiti Mate Fis

Quesito 1. Una grossa locomotiva spinge 10 vagoni per 4 km. L'intensità della forza è rappresentata in figura:



Calcola in J (Joule) il lavoro totale sviluppato dalla locomotiva.

Quesito 2. Abbiamo visto che in tutti i tipi di urto studiati si conserva la quantità di moto, ma quali sono le condizioni in cui la quantità di moto si conserva? E per quale motivo possiamo applicare questo principio (conservazione della quantità di moto) a tutti gli urti?

16 Ancora Mate

Quesito 3. Scrivi in forma algebrica l'insieme $\mathcal{L}$ rappresentato in figura 7.

Python aiutino

```
Circ1 = Eq((x-1)**2+(y-1)**2,2)
```

```
Circ2 = Eq((x-2)**2+y**2,4)
```

```
L = And((x-1)**2+(y-1)**2 <= 2, (x-2)*
```

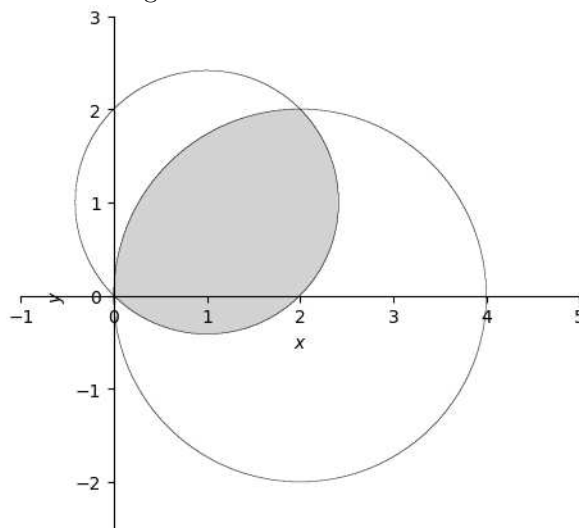


Figura 7: $\mathcal{L}$ è la parte scura

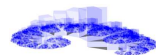
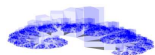
Quesito 4. Sia $z \in \mathbb{C}$ definiamo $\text{Log}(z) \triangleq \log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Calcola i^i .

17 Esercizietti Python

Esercizio 1. Date le rette r ed s incidenti in $=$, $O = r \cap s$.

Calcola l'equazione e costruisci il grafico di una delle circonferenze che soddisfano tutte le seguenti condizioni:



(1) $\widehat{rs} = \frac{\pi}{3}$;

(2) è tangente a s ;

(3) è tangente ad r in $T \in r$;

(4) $OT = 3$.

Spiega, utilizzando le celle di testo, il procedimento risolutivo.

Esercizio 2. Completa l'esercizio 1 disegnando tutte le circonferenze che soddisfano le tre condizioni indicate.

Esercizio 3. Risolvi l'esercizio 1 sostituendo alla (1) la condizione:

(1a) $\widehat{rs} = \vartheta$ dove ϑ è un angolo "casuale" tale che $\frac{\pi}{20} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$

18 Indicazioni

♡ Chi **recupera** svolge esercizi ♡;

♣ Chi **non recupera** svolge gli esercizi ♣;

♣ Chi **non recupera** e svolge gli esercizi ♡ potrà ottenere al massimo $7\frac{1}{2}$

Non è possibile svolgere parte ♣ e parte ♡!

Problema 1. ♡ Un mobile di massa m , inizialmente in quiete, si muove su di un piano liscio sottoposto ad una a forza costante f . Dopo aver percorso s metri raggiunge una velocità v . Calcola:

- (i) l'accelerazione applicata alla massa m in funzione di v , s e m .
- (ii) il lavoro esercitato dalla forza f nel percorso di lunghezza s ;
- (iii) l'energia cinetica della massa m dopo che ha percorso s metri.

Problema 2. ♣

Un mobile di massa m , inizialmente in quiete, si muove su di un piano scabro sottoposto ad una a forza costante f . Dopo aver percorso s metri raggiunge una velocità v . Calcola:

- (i) il coefficiente di attrito μ in funzione di f , v , s ed m ;
- (ii) l'energia dissipata in attrito.

Quesito 1. ♡ ♣ Ricava il lavoro svolto da un agente esterno per comprimere una molla di massa m e costante elastica k

Problema 3. ♡ Dopo aver descritto i diversi tipi di urto, ricava la velocità in funzione delle masse M ed m e delle velocità V e v di due oggetti che si urtano in modo anelastico scontrandosi. (M si muove verso m con velocità V , mentre m si muove verso M con velocità v).

Problema 4. ♣ Su di un carrello di massa M , inizialmente in quiete, si trova una pistola ad aria compressa che spara palline di gomma di massa $m = \frac{M}{100}$. Se le palline vengono sparate con velocità costante v , calcola la velocità del carrello dopo che sono state sparate tre delle 100 palline del caricatore. (La massa della pistola è compresa nella massa M del carrello). A che velocità si muoverà il carrello quando il caricatore è vuoto?

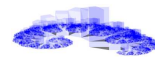
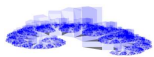
Problema 1. Un mobile di massa m , inizialmente in quiete, si muove su di un piano liscio sottoposto ad una a forza costante. Dopo aver percorso s metri raggiunge una velocità v . Calcola:

- (i) il lavoro esercitato dalla forza f nel percorso di lunghezza s ;
- (ii) l'energia cinetica della massa m dopo che ha percorso s metri.

Problema 2. Ricava la traiettoria di un proiettile lanciato da un'altezza di $2\ m$ dal suolo con velocità $\vec{v}$ il cui modulo è $2\ \frac{m}{s}$ e l'angolazione del vettore rispetto al suolo è $\frac{\pi}{3}\ rad$.

Quesito 1. Ricava il lavoro svolto da un agente esterno per comprimere una molla di massa m e costante elastica k .

Problema 3. Una massa m nell'istante $t = 0$ si muove, su di un piano scabro, con velocità v . Dopo aver percorso un tratto di lunghezza d , si ferma. Calcola il coefficiente d'attrito e l'energia dissipata.



19 Indicazioni

♡ Chi **recupera** svolge esercizi ♡;

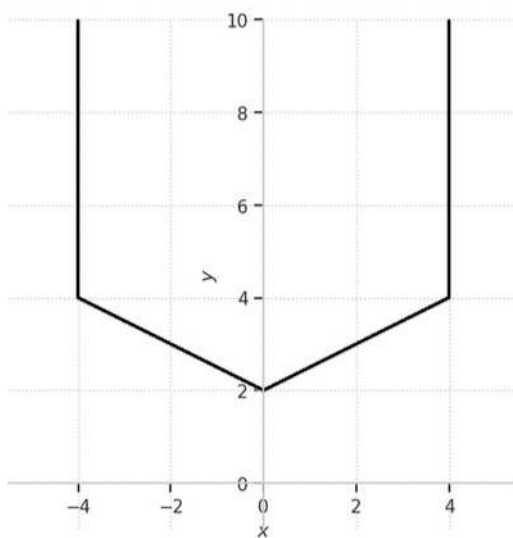
♣ Chi **non recupera** svolge gli esercizi ♣;

♣ Chi **non recupera** e svolge gli esercizi ♡ potrà ottenere al massimo $7\frac{1}{2}$

Non è possibile svolgere parte ♣ e parte ♡!

Problema 1. ♡ Disegna la TaxiEllisse di equazione $|x| + |y| + |x + 1| + |1 - y| = 4$.

Problema 2. ♣ Individua l'equazione della taxiparabola rappresentata in figura:



Problema 3. ♡ ♣ Risolvi le seguenti disequazioni:

a) $\frac{1 - x^2}{1 + x^3} \leq 0$;

b) $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 4 \leq 0$;

c) $2 \cos(x) \geq 1$.

Problema 4. ♡ Calcola l'equazione della parabola di asse $x = 3$ che passa per i punti $A = (5, 0)$ e $B = \left(0, -\frac{5}{4}\right)$.

Problema 5. ♣ Calcola l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ di asse $x = 3$ tangente in $A = (5, 0)$ alla retta $y = x - 5$.

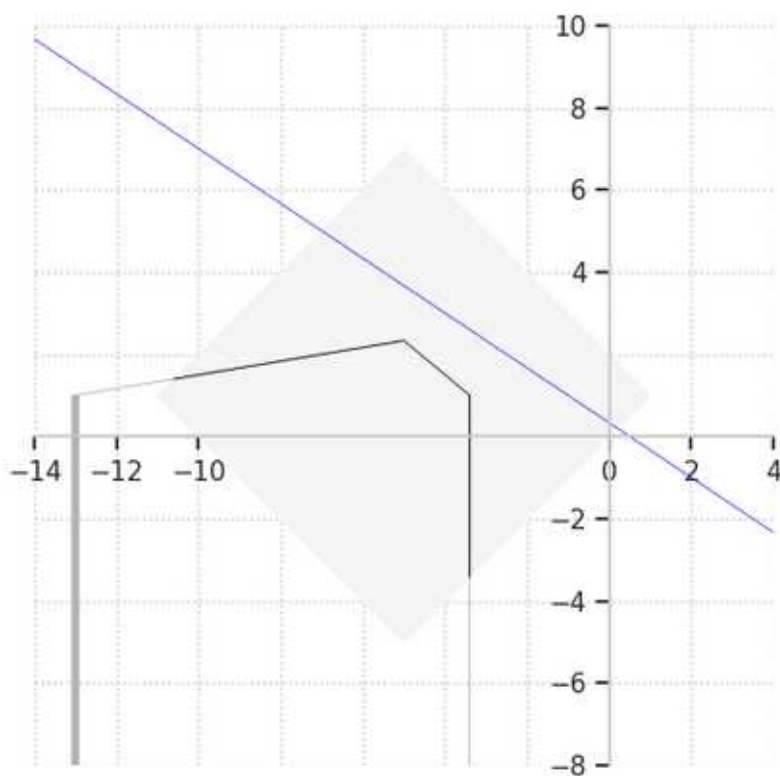
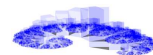
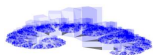
Quesito 1. ♡ Definizione di funzione periodica, definizione di funzione pari.

Scrivi l'equazione di una funzione periodica e pari.

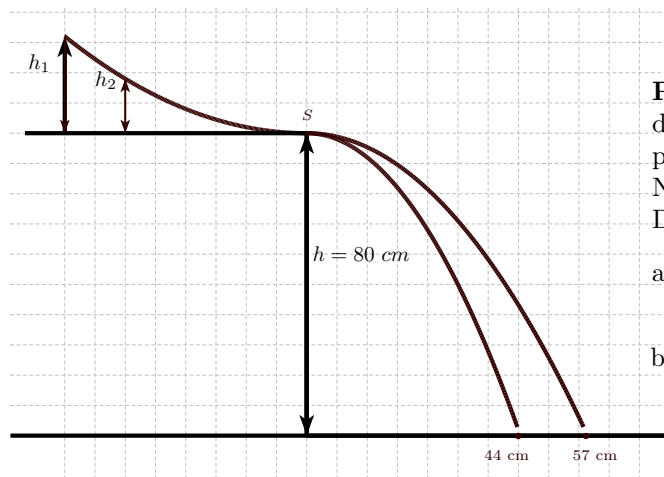
Quesito 2. ♡ In un contenitore ci sono 30 palline rosse e 20 gialle. Ne estraggo contemporaneamente 5, qual è la probabilità che ce ne siano 3 rosse e 2 gialle?

Quesito 3. ♣ Definite, $\forall A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ le seguenti metriche: $d_{max} = \max\{|x_A - x_B|, |y_A - y_B|\}$ e $d_T(A, B)$ taxi, per quali punti A, B si ha che $d_{max} = d_T$?

Quesito 4. ♣ In un contenitore sono posizionate n palline di cui il 70 % sono rosa. Estraggo una pallina, se è rosa: faccio una X sulla lavagna e reinserisco nel contenitore la pallina, se non è rosa reinserisco la pallina senza segnare nulla sulla lavagna. Dopo 10 estrazioni qual è la probabilità di avere 5 X impressa sulla lavagna?

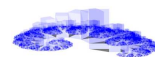
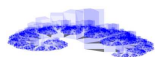


20 Problemi Fis_{Mate} e $Mate$

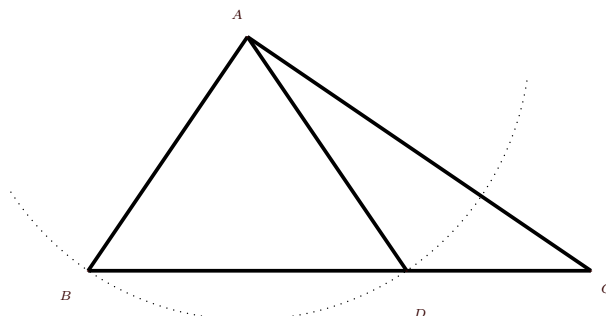


Problema 1. In figura sono rappresentate le traiettorie descritte da un mobile di massa $m = (31.4 \pm 0.1) \text{ g}$ che parte, in quiete, prima da una altezza h_1 e poi da h_2 . Nel punto S si stacca dal tavolo. Dopo aver fatto le opportune ipotesi,

- calcola, utilizzando i dati riportati nel grafico, le equazioni delle due traiettorie.
- Sapendo che $h_1 = 15 \text{ cm}$ e $h_2 = 9 \text{ cm}$, descrivi il tipo di moto del mobile lungo la rotaia.



Problema 2. Il triangolo ABC è rettangolo in A ($AC > AB$), la circonferenza di centro A e raggio AB incontra il cateto BC in D . Se $BD = 20$ e $DC = 16$ quanto misura AC ?



Quesiti non solo *Mate*

Due disequazioni per gradire

Quesito 1. Risolvi in $[0, 2\pi]$: $(2 \cos x - \sqrt{3})(\sqrt{2} \cos x - 2) < 0$;
Risolvi in $\mathbb{R}$: $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 7x + 12) - \log_{\frac{1}{4}}(9 - x^2) > 0$

Un pizzico di probabilità

Quesito 2. Se in un contenitore ci sono 10 palline numerate da 59 a 68, calcola la probabilità che estraendo contemporaneamente 4 palline:

- i) non mostrino numeri maggiori di 65;
- ii) i 4 numeri estratti risultino consecutivi.

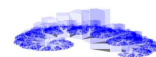
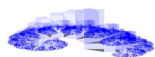
Numeri complessi q.b.

Quesito 3. Risolvi la seguente equazione e rappresenta le soluzioni nel piano complesso:

$$z^6 - iz^4 + z^2 - i = 0$$

E per finire ... una spolverata di *Fisica*

Quesito 4. Per sollevare, molto lentamente, di un metro una grossa pietra, si compie un lavoro pari a 500 J . Quanto vale la massa della pietra?

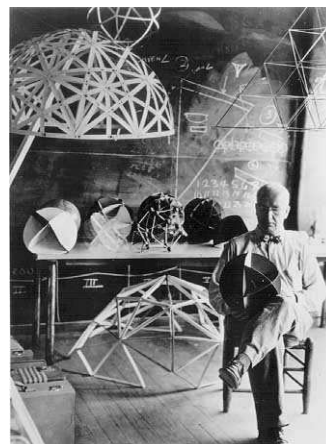


Non si deve risolvere ma ...

Una spazio vuoto ... va riempito!

[...] Molti dei lavori più famosi di Escher riflettono proprio le idee sui politopi di Coxeter, e la serie di incisioni "Circle Limit" trae ispirazione dai suoi studi sugli spazi a n -dimensioni. Coxeter e Escher rimasero amici fino alla scomparsa dell'artista nel 1972. Nel 1996 Coxeter pubblicò un'analisi del "Circle Limit III" di Escher in cui dimostrava la precisione matematica dell'opera. "Escher ha raggiunto il suo risultato per istinto, mentre io ci sono arrivato attraverso la trigonometria. Ma il suo lavoro è assolutamente preciso, al millimetro. Sfortunatamente non è vissuto tanto a lungo da poter vedere la mia esposizione matematica".

Coxeter era amico di R. Buckminster Fuller (1895-1985), l'originale e geniale ingegnere e architetto americano che ha riconosciuto la grande influenza esercitata dalle idee di Coxeter nella realizzazione delle sue celebri "Cupole geodetiche". Proprio queste cupole e le idee di Coxeter sulle simmetrie, hanno portato alla scoperta, premiata nel 1996 con il premio Nobel per la chimica, delle "buckyballs" (così chiamate in onore di Buckminster), una nuova forma di cristallizzazione del carbonio, sfere vuote, ciascuna con 60 atomi di carbonio alla superficie, posizionate in modo da formare degli esagoni e dei pentagoni. Molecole che possono formare i "buckytubes", nanotubi dalle eccezionali proprietà elettroniche. Coxeter, brillante conferenziere, è autore di molti libri di matematica. Uno in particolare, *Introduction to geometry*, è un capolavoro di didattica, citato in tutti i testi che si occupano di geometria per la scuola. Ha anche curato la riedizione di uno dei più bei libri di giochi matematici, un classico, *Mathematical Recreations and Essays* di Rouse Ball. Per sua fortuna, nonostante l'età, non ha mai dovuto abbandonare gli studi matematici.



<https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/Coxeter/Coxeter.htm>

Quesito 1. Una sfera omogenea⁽¹⁾ di massa m e raggio R , rotola senza strisciare con una velocità angolare ω . Nell'istante $t = 0$ inizia a salire, rotolando senza strisciare, lungo un piano inclinato di un angolo ϑ . Ricava quanto spazio percorre lungo il piano inclinato.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

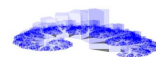
.....

.....

.....

Quesito 2. Risolvi il quesito 1 utilizzando i seguenti dati:

$$^1I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$$



-
-

.....

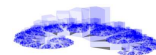
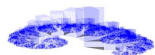
.....

.....

.....

.....

[illegible]



21 *MateTeoria*

Quesito 1. Dimostra che il numero complesso $u = 1$ è l'elemento neutro del prodotto fra numeri complessi.

Quesito 2. Come è definito l'argomento principale di un numero complesso $z = x + iy$.

Quesito 3. Spiega come si calcola la distanza punto retta nella geometria Taxi.

Quesito 4. Come è definita la funzione $\arcsin(x)$.

Quesito 5. Ricava la formula del cambiamento di base dei logaritmi:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Quesito 6. Perché è così importante la base e negli esponenziali?

22

Quesito 7. Nel periodo natalizio tre ragazzi lavorano in un grande magazzino per impacchettare i regali. Riccardo prepara il 40% dei pacchetti, Elena impacchetta il 38% dei regali e Giovanni prepara i pacchi rimanenti. Sappiamo che la probabilità che un pacco preparato da Riccardo abbia l'etichetta del prezzo è 0.76%, la probabilità che un pacco preparato da Elena non abbia l'etichetta del prezzo è 98.76%, infine la probabilità che un pacco preparato da Giovanni non abbia l'etichetta del prezzo è 96%.

a) Qual è la probabilità che ad un regalo acquistato ed impacchettato in questo grande magazzino non sia stata tolta l'etichetta del prezzo?

Si supponga che un cliente scopra che ad un regalo da lui fatto ad amici ed impacchettato nel grande magazzino, non era stata tolta l'etichetta del prezzo.

b) Qual è la probabilità che quel pacco sia stato impacchettato da Riccardo?

23 *MatePratica*

Problema 1. Scrivi in forma trigonometrica (o se preferisci in forma polare) i seguenti numeri complessi:

a) $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$;

b) $z_2 = 2025 - 2025i$;

c) $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

d) $z_4 = \sum_{k=0}^{2025} i^k$.

Problema 2. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $\frac{x^3 - x^2}{x^4 - 3x^2 + 4} \leq 0$;

c) $\left(\frac{9}{25}\right)^x - 3\left(\frac{3}{5}\right)^x \leq 4$;

d) $\frac{1 - \operatorname{tg}^3(x)}{\operatorname{tg}^2(x) - 3\operatorname{tg}(x) - 4} \leq 0$;

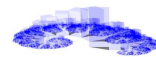
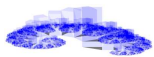
b) $\log_8 x - \log_{\frac{1}{8}} x^2 \geq 1$;

e) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) \geq \sqrt{3}$.

Problema 3. Disegna la taxiEllisse di fuochi $F_1 = (-2, -1)$ ed $F_2 = (2, 1)$ a cui appartiene il punto $A = (4, 0)$

Problema 4. Dimostra che, in un triangolo isoscele ABC , la bisettrice di uno dei due angoli adiacenti al vertice A è parallela alla base BC .

Quesito 8. Dopo aver verificato che la tangente al grafico $\mathcal{G}_f$ della funzione $f(x) = x - x^3$ nel suo punto T di ascissa nulla è la retta $r : y = x$, calcola l'equazione delle circonferenze tangenti in T ad r aventi il centro su $\mathcal{G}_f$.



24 Se avanza tempo e ... comunque per casa

Problema 5. Siano a e b due interi relativi ($a, b \in \mathbb{Z}$), definiamo $q(a, b)$ il numero $a^2 - ab + b^2$. Un intero n è definito numero di Eisenstein se esistono a e b tali che n può essere scritto nella forma $n = q(a, b)$.

I numeri di Eisenstein sono stati studiati dal matematico tedesco Gotthold Eisenstein (1823-1852).

- 1) Calcola $q(0, 0)$; $q(0, 1)$; $q(0, 2)$; $q(1, 1)$; $q(1, 2)$; $q(-1, 1)$ e $q(-1, 2)$.
- 2) Ricava che 49 e 91 sono numeri di Eisenstein.
- 3) Ricava che se m è un intero allora m^2 e $3m^2$ sono numeri di Eisenstein.
- 4) Ricava che se n è un numero di Eisenstein, allora anche $4n$ è un numero di Eisenstein.
- 5) Dimostra l'uguaglianza $a^2 - ab + b^2 = \frac{(2a - b)^2 + 3b^2}{4}$. Ricava, inoltre, che i numeri di Eisenstein sono tutti positivi.
Dimostra che 2 non è un numero di Eisenstein.
- 6) Costruisci, un algoritmo che permette di scrivere tutti i numeri di Eisenstein compresi fra 0 ed n . Applica l'algoritmo per ottenere la lista dei numeri di Eisenstein compresi fra 0 e 25.
- 7) Dimostra che se n è un intero allora $3n - 1$ non è un numero di Eisenstein.
- 8) Dimostra che il prodotto di due numeri di Eisenstein è un numero di Eisenstein.
- 9) Dimostra che se n è un multiplo di 9, allora n è un numero di Eisenstein se e solo se $\frac{n}{3}$ è pure un numero di Eisenstein.

Francia (olympiades nationales de mathématiques pour l'année 2019, Grenoble)

25 Disequazioni quasi senza numeri

- i) $\mathcal{I}_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in (-\infty, 2025)\} = (0, 2025)$
 $\frac{2}{f(x)} + (f(x))^2 \leq 0$
- ii) $\mathcal{I}_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in (-2025, 2025)\} = (0, 1)$
 $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt[4]{f(x)}$
- iii) $\mathcal{I}_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in [-5, +\infty)\} = (-1, 0)$
 $\log_{|f(x)|} (f(x))^2 \geq 0$
- iv) $\mathcal{I}_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in (-\infty, +\infty)\} = (-\infty, 0)$
 $e^{f(x)} \leq |f(x)| + 1$
- v) $\mathcal{I}_f = \left\{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right\} = (-\infty, -1)$
 $\arcsin\left(\frac{1}{f(x)}\right) \geq 0$

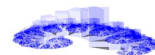
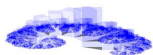
26 Geometria

26.1 Analitica

Problema 1. Calcola l'equazione della parabola che interseca l'asse delle ascisse in $x = -1$ ed è tangente nel punto $A = (1, 1)$ alla circonferenza Γ di centro l'origine.

Problema 2. Calcola $a, b > 0$ dell'ellisse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$. Sapendo che la trasformazione:

$$\tau : \begin{cases} X = 2x \\ Y = \frac{y}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ è tale che } \tau(\mathcal{E}) = \Upsilon, \text{ dove } \Upsilon : X^2 + Y^2 = 5$$



26.2 Sintetica

Problema 3. Nel triangolo ABC si ha $\hat{A} = 2\hat{B}$. Preso un punto D di AB , si prolunghi CA , dalla parte di A del segmento $AE = AD$. Congiunto E con D , sia F il punto comune alle rette ED e CB . Dimostra che sono uguali gli angoli $\hat{ABC}$ e $\hat{AED}$, e così pure $\hat{DFC}$ e $\hat{CAB}$

27 Physics

Problema 4. A uniform disc of radius $R = 20\text{ cm}$ has a round cut as shown in Fig. 9. The mass of the remaining (shaded) portion of the disc equals $m = 7.3\text{ kg}$. Find the moment of inertia of such a disc relative to the axis passing through its centre of inertia and perpendicular to the plane of the disc.

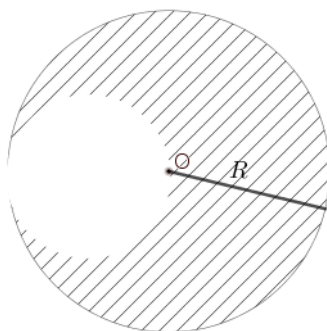
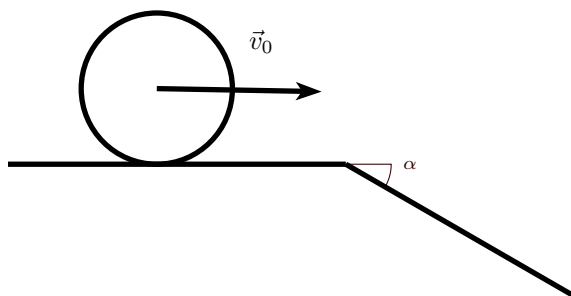


Figura 8: A uniform disc

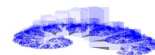
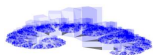
Problema 5. A uniform solid cylinder of radius $R = 15\text{ cm}$ rolls over a horizontal plane passing into an inclined plane forming an angle $\alpha = 30^\circ$ with the horizontal. Find the maximum value of the velocity v_0 which still permits the cylinder to roll onto the inclined plane section without a jump. The sliding is assumed to be absent.



28 Funzioni

Disegna il grafico:

- $f_{p3}(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$
- $f_{p5}(x) = \log\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right)$
- $f_{p11}(x) = \arctg\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right) + \frac{\pi}{2}$



29 Per finire ...teoremino

Sappiamo che $z = x + iy = |z|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ dove $\vartheta = \arg(z) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ o $\arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$.

Teorema 2. Dimostra che gli $u \in \mathbb{C}$ unitari, per i quali $\frac{\arg(u)}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, hanno solo un numero finito di potenze distinte.

Problema 1. Ricava l'affinità τ che al triangolo di vertici $A = (-3, 1)$, $B = (0, 1)$ e $C = (-3, 3)$ fa corrispondere, il triangolo di vertici $A = (-6, 6)$, $B = (-4, 6)$ e $C = (-6, 3)$.

- Rappresenta nello stesso riferimento i due triangoli;
- ricava l'equazione della circonferenza Γ circoscritta al triangolo ABC ;
- ricava l'equazione di $\tau(\Gamma)$;
- $\tau(\Gamma)$ è la circonferenza circoscritta a $A'B'C'$?

30 MateTeoria

Quesito 1. Sia $\mathcal{P}$ una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate e T un suo punto di ascissa x_0 . Spiega come si calcola la tangente a $\mathcal{P}$ in T e come si calcola l'equazione della circonferenza Γ di raggio r tangente a $\mathcal{P}$ in T .

Quesito 2. È dato il triangolo acutangolo ABC , dimostra che:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot CB \cos(\widehat{BCA})$$

Se il triangolo ABC è ottusangolo, si ottiene lo stesso risultato? (Motiva la risposta)

31 MatePratica

Problema 1. Risolvi in un opportuno insieme $\mathcal{D}^{(1)}$

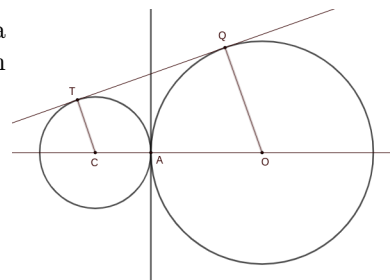
- 1) $\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x-3) < 0$;
- 2) $\frac{x^4 - 16}{x^2 + 1} \leq 1$;
- 3) $\cos(x)(2\sin^2(x) - 1) \geq 0$;
- 4) $\frac{\operatorname{tg}^3(x) - 1}{\cos^2(x) + 1} \geq 0$;
- 5) $\left(\frac{1}{e}\right)^{4x} - 3\left(\frac{1}{e}\right)^{2x} \leq 4$.

Problema 2. In un contenitore ci sono 50 dadi, 10 mostrano con uguale probabilità le sei facce, 15 mostrano la faccia con sei punti con probabilità $\frac{1}{2}$ e le altre facce con probabilità $\frac{1}{10}$, i restanti dadi mostrano la faccia con un punto e la faccia con sei punti ciascuna con probabilità $\frac{1}{3}$ le restanti con probabilità $\frac{1}{12}$. Estratto dal contenitore un dado viene lanciato e si ottiene sei.

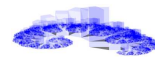
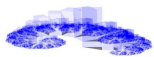
Qual è la probabilità che il dado sia equo?

Problema 3. Sono date due circonferenze di centri C e O , tangenti alla retta r rispettivamente in T e Q . Detto M il punto di intersezione della tangente in A alle due circonferenze, con il segmento TQ . Dimostra che:

- M è il punto medio di TQ ;
- $\widehat{CMO}$ è retto;
- la circonferenza di diametro TQ è tangente in A alla retta CO .



¹Da indicare, ad esempio disequazione 2) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$



Esercizio 4. ⁽²⁾Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo ($\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ sono rettangoli) in cui $AB = DA = 1$ (DA è la base minore). Determina l'ampiezza dell'angolo $\widehat{BCD} = x$ in modo che:

$$AH + BK = 2k \quad (1)$$

Dove H e K sono, rispettivamente, le proiezioni di A e di B sulla retta DC .

Problema 4. Con riferimento all'esercizio 5:

- a) costruisci la figura;
- b) determina, motivando, i limiti per x ;
- c) calcola AH ;
- d) calcola BK ;

e) La (2) porta a costruire il seguente sistema misto:
$$\begin{cases} 2Y + X = 2k \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq 1 \end{cases} \quad \text{Discuti.}$$

Quesito 3. Scrivi in forma polare $z = (1 - \sqrt{3}i)^{2025}$

Quesito 4. Ricava le x :

$$6 \binom{x}{x-2} - \binom{x+1}{x-2} = 2 \binom{x}{x-4}$$

Quesito 5. Disegna nel piano di Gauss l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ tali che:

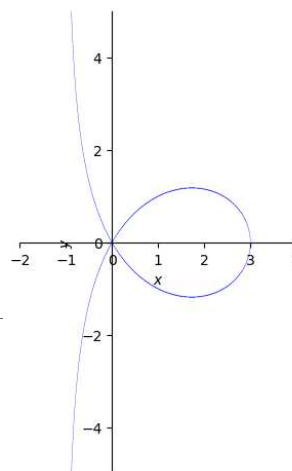
$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = 1$$

Trisettrice di Maclaurin

This was first studied by Colin Maclaurin in 1742. Like so many curves it was studied to provide a solution to one of the ancient Greek problems, this one is in relation to the problem of trisecting an angle. The name trisectrix arises since it can be used to trisect angles.

$a = 1$

```
TriSec = plot_implicit(Eq(y**2*(x+a), x**2*(3*a-x)), (x, -
TriSec.aspect_ratio = (1,1)
TriSec.show()
```



32 MateTeoria

Quesito 1. Sia $\mathcal{P}$ una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate e T un suo punto di ascissa x_0 . Come si calcolano le equazioni delle circonferenze tangenti alla parabola in T di fissato raggio r ? Per quali valori di r la circonferenza hanno punti di intersezione diversi da T ?

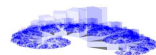
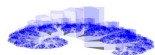
Quesito 2. Enuncia e dimostra il teorema della corda

33 MatePratica

Problema 1. Risolvi in un opportuno insieme $\mathcal{D}$ ⁽¹⁾

⁽²⁾È richiesto, solo, di rispondere alle domande del problema 4

⁽¹⁾Da indicare, ad esempio disequazione 2) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$



- 1) $\log(1-x) + \log(2-x) - \log(s-x) < 0$;
- 2) $\frac{x^4 - 81}{x^2 + 1} \leq 1$;
- 3) $\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) \geq 0$;
- 4) $\frac{1 - \operatorname{tg}^3(x)}{\cos^2(x) + 1} \geq 0$;
- 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \leq 4$.

Problema 2. In un contenitore ci sono 50 dadi, 10 di (tipo 1): mostrano con uguale probabilità le sei facce, 15 di (tipo 2) mostrano la faccia con sei punti con probabilità $\frac{1}{2}$ la faccia con un punto con probabilità $\frac{1}{4}$ le altre facce con probabilità $\frac{1}{20}$, i restanti (tipo 3) dadi mostrano la faccia con un punto e la faccia con sei punti ciascuna con probabilità $\frac{1}{3}$ le restanti con probabilità $\frac{1}{12}$. Estratto dal contenitore un dado viene lanciato e si ottiene uno.

Qual è la probabilità che il dado sia del (tipo 2)?

Problema 3. I punti M ed N dividono una corda AB di una circonferenza in tre segmenti uguali AM, MN, NB . Le perpendicolari per M e per N ad AB , unitamente ai punti A e B , dividono la circonferenza in sei archi. Quali di essi sono uguali? Motiva con cura la risposta.

Esercizio 5. ⁽²⁾ È data la semicirconferenza Γ il cui diametro misura 2, traccia la corda AC in modo che, detto D l'estremo del raggio parallelo alla corda sia:

$$AC + CD = 2k \quad (2)$$

Problema 4. Con riferimento all'esercizio 5:

- a) costruisci la figura;
- b) scelto $\widehat{BAC} = x$. Determina, motivando, i limiti per x ;
- c) calcola AC ;
- d) calcola CD ;
- e) La (2) porta a costruire il seguente sistema misto:
$$\begin{cases} y = k - 1 \\ y = X - 2X^2 \\ 0 \leq X \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{Discuti.}$$

Quesito 3. Scrivi in forma polare $z = (\sqrt{3} - i)^{2025}$

Quesito 4. Disegna nel piano di Gauss l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ tali che:

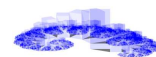
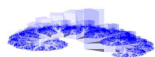
$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$$

34 Attività a coppie 14 aprile 2025

34.1 Cosa svolgere

Esercizi della **Parte I** la coppia risolve gli esercizi corrispondenti al proprio numero nell'ordine alfabetico del registro (ad esempio: Brosolo, Lazzarin risolvono gli esercizi I.2 e I.8). Esercizi della **Parte II** la coppia risolve l'esercizio corrispondente al proprio numero indicato nella tabella (ad esempio: Brosolo, Lazzarin risolvono l'esercizio II.1).

²È richiesto, solo, di rispondere alle domande del problema 4



34.2 Consegne

Risolvere i problemi assegnati utilizzando Python e in particolare la libreria sympy. Descrivere, usando le caselle testo Markdown, dettagliatamente le strategie risolutive e le tecniche di risoluzione usate.

Tutto il lavoro deve essere inserito in un unico file in cui indicare in Markdow la coppia, il primo problema risolto la soluzione, il secondo problema risolto la soluzione, il terzo problema risolto la soluzione. Il nome del file prime coppiaN dove N indica il numero della coppia (ad esempio coppia Brosolo Lazzarin indicherà coppia1).

```
# Coppia N: Nome Cognome, Nome Cognome

## Problema m
Dato che ... l'incognita è ...

[ ]:

## Problema r
Dato che ... l'incognita è ...

[ ]:

▼ ## Problema s
Costruita la trasformazione ...

[ ]:
```

Coppia N: Nome Cognome,
Nome Cognome

Problema m

Dato che ... l'incognita è ...

[]:

Problema r

Dato che ... l'incognita è ...

[]:

Problema s

Costruita la trasformazione ...

[]:

Completato il lavoro uno dei due componenti la coppia carica su joaogas.it il lavoro utilizzando le proprie credenziali.

Quesito 1. Ricava la relazione di Mayer⁽¹⁾ $R = C_p - C_V$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 2. Dopo aver indicato le ipotesi del modello cinetico dei gas, ricava che l'energia interna dipende dalla temperatura.

.....

.....

.....

.....

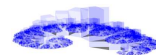
.....

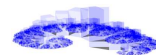
.....

.....

.....

¹Julius Robert von Mayer medico e fisico tedesco (Heilbronn 1814 - Heilbronn 1878)

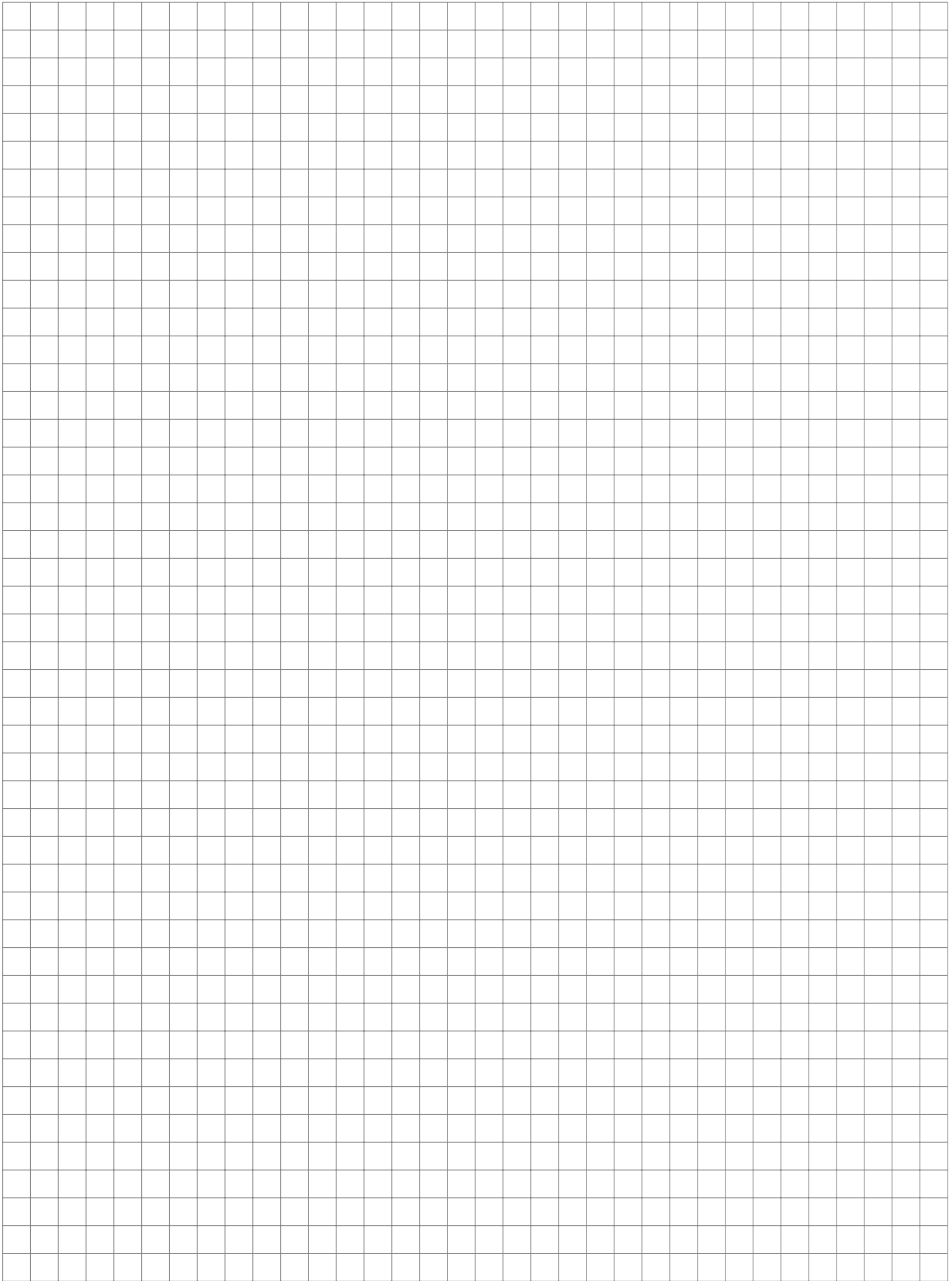
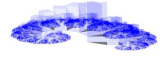
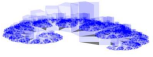
[illegible]
$$^2\text{densità ferro: } \rho_{fe} = 7870 \frac{kg}{m^3}, \text{ calore specifico del ferro } c_{fe} = 460 \frac{J}{K \cdot kg}, \text{ momento inerzia sfera } I_{cm} = \frac{2}{5} m_{sfera} R_{sfera}^2$$

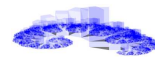
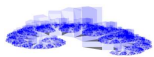


- i) Calcola V_2 ;
- ii) calcola il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione $1 \rightarrow 2$.

[illegible]

- costante universale dei gas $\Rightarrow R = 8.31 \frac{J}{K \cdot mole}$
- costante di Boltzmann $\Rightarrow k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
- numero di Avogadro $\Rightarrow N_0 = 6.02 \cdot 10^{23}$
- fattore di conversione da cal a $J \Rightarrow 1cal = 4.186J$
- fattore di conversione da $\frac{N}{m^2}$ a $atm \Rightarrow 1 \frac{N}{m^2} = 9.869 \cdot 10^{-6} atm$
- gas monoatomico $\Rightarrow C_p = \frac{5}{2} R$
- gas biatomico $\Rightarrow C_p = \frac{7}{2} R$





Problema 1. Risolvi le seguenti disequazioni in $\mathbb{D}^{(1)}$:

a) $\frac{1-x^4}{8-x^3} \leq 0$

d) $\log_{\frac{1}{e}}(x+2) - \log_{\frac{1}{e}}(x^2-4) \leq 2$

b) $\sqrt{x^2-2x} \leq 1-x$

e) $\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) \leq 1$

c) $9^x - 3 \cdot 3^x - 4 < 0$

f) $\operatorname{tg}^4(x) - \operatorname{tg}^2(x) \leq 0$

Problema 2. Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro C , conduci i due segmenti di tangenza PA e PB . Dimostra che il quadrilatero $CAPB$ è inscritto e circoscrittibile.⁽²⁾

Problema 3. Data l'affinità $\tau : \begin{cases} \underline{x} = -2x + y \\ \underline{y} = -x + y \end{cases}$:

1) costruisci τ^{-1} (trasformazione inversa),

2) calcola i trasformati $\tau(A)$, $\tau(B)$ e $\tau(C)$, dove $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, -2)$.

3) Calcola l'equazione della circonferenza Γ circoscritta al triangolo ABC .

4) Calcola l'equazione di $\tau(\Gamma)$.

5) Calcola l'equazione della tangente t a Γ .

6) Calcola $\tau(t)$, spiega perché $\tau(t)$ è tangente in $\tau(A)$ a $\tau(\Gamma)$.

Problema 4. Sia Γ una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$, la corda $AC = r\sqrt{3}$, Determina un punto D sull'arco AC , in modo che si abbia:

$$AD - DC = kr \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Discussione

Quesito 1. Dati $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, dimostra che $z_1 z_2$ realizza nel piano di Gauss una roto-omotetia⁽³⁾.

Quesito 2. Calcola l'incremento (derivata) della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{x^5}$

Quesito 3. Un dado regolare viene lanciato tre volte.

Considera l'evento $E = \{\text{la somma dei punti ottenuti nei tre lanci è nove}\}$:

i) calcola la probabilità di E .

Sia $C6 = \{\text{nel primo lancio esce sei}\}$

ii) calcola $p(C6|E)$.

35 Disequazioni

Problema 1. Qui bruttine ma servono per allenamento:

1) $|\log_{10}(3x+4) - \log_{10}(7)| < 1$

3) $\frac{\log |\cos(x)|}{\cos^2(x) - |\cos(x)| + 1} \geq 0$

2) $\frac{|\log(x)|}{(\log(x)-1)^2} \leq \frac{1}{2}$

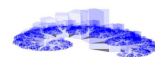
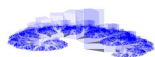
4) $9^{\sin(x)} - 3^{\sin(x)} < 0$

5) $\log_4 \cos(x) - \log_2 \cos(x) < 0$

¹ $\mathbb{D}$ è lo spazio delle soluzioni che deve essere indicato

²Cioè esiste Γ_1 circonferenza circoscritta e Γ_2 circonferenza inscritta.

³composizione di una rotazione con una omotetia



36 Geometria

Problema 2. Inscritto in una circonferenza un pentagono regolare $ABCDE$, siano M ed N i punti di intersezione della diagonale AC rispettivamente con le diagonali BD e BE . Dimostra che MC è la sezione aurea di AM e che AN è la sezione aurea di MC .

37 Problema con discussione

Problema 3. In triangolo ABC , l'angolo in $\hat{B}$ è il doppio dell'angolo $\hat{C}$. Sapendo che $BC = 2$ e che, dette BH e CK le altezze relative ai vertici B e C , si ha che:

$$BH^2 + CK^2 = 4m \quad m \in \mathbb{R}^+$$

Discussione

38 Non solo trasformazioni

Dati i punti $A = (-1, 5)$, $B = (4, 0)$ e $C = (5, 5)$,

- 1) calcola l'equazione della parabola ($\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$) a cui appartengono i punti A, B, C ;
- 2) calcola l'area del triangolo $\mathcal{T}_{ABC}$;
- 3) costruisci un'affinità τ_0 per cui $\tau_0(\mathcal{T}_{ABC})$, risulti quattro volte l'area di $\mathcal{T}_{ABC}$.

Considera ora la trasformazione:

$$\tau_1 : \begin{cases} \underline{x} = -3x + y \\ \underline{y} = 3x + \frac{1}{3}y \end{cases}$$

- 1) Calcola $\tau_1(\mathcal{P})$;
- 2) calcola l'equazione della trasformata della retta tangente a $\mathcal{P}$ che passa per l'origine;
- 3) verifica che la tangente trasformata è tangente a $\tau_1(\mathcal{P})$.

39 Da non dimenticare

Quesito 1. Disegna nel piano di Gauss: $z_1 = \frac{3-i}{i-1}$, $z_2 = \frac{2-i}{i}$, $z_3 = \frac{i}{i-1}$. Disegna poi $z_1 z_2$, $z_1 z_3$.

Quesito 2. Calcola l'incremento della funzione $x(t) = \sqrt{t^3 - t^2} + t$

Quesito 3. Trovare una formula che fornisca il valore del prodotto:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

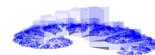
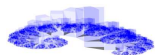
per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dimostrarne la validità per induzione.

Quesito 4. Tre commissioni d'esame bocciano in media con la seguente frequenza: la prima il 20% degli studenti, la seconda il 40% degli studenti, la terza il 65% degli studenti. Sapendo che uno studente è stato bocciato, qual è la probabilità che sia stato esaminato dalla terza commissione?

Sapendo che uno studente è stato promosso, qual è la probabilità che sia stato esaminato dalla terza commissione?

Quesito 5. Supponiamo di considerare ovetti di cioccolato con sorprese numerate da 1 a 4. La probabilità di avere una delle 4 sorprese sia $\frac{1}{4}$.

- a) Calcolare la probabilità di trovare almeno una sorpresa 1 comperando 4 ovetti.
- b) Calcolare la probabilità di trovare 3 sorprese diverse comperando 4 ovetti.



- c) Trovare quanti ovetti bisogna comperare per avere una probabilità ≥ 0.9 di trovare almeno una volta la sorpresa 1.

Parte I

Esercizio 6. Un trapezio convesso è inscritto in un cerchio il cui raggio misura r ed ha la base maggiore su un diametro. Determinare gli altri tre lati del trapezio sapendo che il rapporto tra la loro somma e la base maggiore vale k

Esercizio 7. È dato l'angolo retto $\widehat{XOY}$ ed il punto P della sua bisettrice per il quale è $OP = 2$. Condurre per P una trasversale in modo che dette A e B le sue intersezioni con i lati OX e OY , si abbia

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = k$$

Esercizio 8. È data una semicirconferenza avente il diametro AB di misura $2r$. Si determini il punto C della semicirconferenza in modo che, detta H la sua proiezione ortogonale sul diametro, si abbia

$$2CH + HB = kr$$

Esercizio 9. Nel triangolo ABC l'angolo di vertice B è di 60° . Determinare la misura dell'angolo $\widehat{ACB}$ in modo che, detta A_1 la proiezione di A su BC , si abbia:

$$AB + A_1C = \frac{1}{6}k \cdot AC,$$

Esercizio 10. Nel trapezio $ABCD$ gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ sono retti e la diagonale AC forma con il lato obliquo BC un angolo di 30° . Calcolare l'ampiezza x dell'angolo $\widehat{CAB}$ in modo che sia soddisfatta la relazione

$$AD + DC = kAB$$

Esercizio 11. Due semirette a e b , aventi la stessa origine O , formano un angolo di 60° : sia A un punto dato sulla semiretta a e B la sua proiezione ortogonale su b .

Nel medesimo piano, esternamente all'angolo convesso $\widehat{ab}$ e con l'origine in O , si conduca una terza semiretta c e sia C la proiezione ortogonale del punto A su di essa. Determinare l'angolo $\widehat{AOC} = x$ in modo che si abbia:

$$AC^2 + BC^2 = kAB^2$$

I

Esercizio 12. In una circonferenza di raggio r è inscritto il triangolo equilatero ABC . Determinare un punto P sull'arco AB non contenente C , in modo che la differenza fra le aree dei triangoli PCA e PCB sia $\frac{1}{k}$ dell'area di ABC .

Esercizio 13. In una semicirconferenza il cui diametro AB misura $2r$ inscrivere un quadrangolo convesso $ABCD$ in modo che il lato BC misuri r e che il perimetro misuri $2kr$.

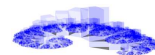
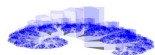
Esercizio 14. È dato il settore circolare AOB avente l'angolo $\widehat{AOB}$ ed il raggio che misurano rispettivamente $\frac{2}{3}\pi$ ed r . Determinare il punto M dell'arco AB in modo che l'area del quadrilatero $OAMB$ sia $\frac{1}{2}kr^2$

Esercizio 15. È data una semicirconferenza il cui diametro AB misura $2r$; si tracci la corda AC di misura $r\sqrt{2}$ e si determini sull'arco BC un punto P per il quale valga la relazione:

$$PA^2 - 2PC^2 = kAB^2,$$

Esercizio 16. Una circonferenza di centro O e raggio r è tangente in A e in B a due rette a e b tra loro perpendicolari e che si incontrano nel punto C . Una retta t condotta da C incontra la circonferenza rispettivamente in D e in E ; determinare la posizione della retta t in modo che, detto H il piede della perpendicolare condotta dal centro O alla retta t , si abbia:

$$OH + CD + CE = 2kr.$$



Esercizio 17. In una circonferenza il cui raggio misura r , si consideri una corda AB avente la distanza dal centro di misura $\frac{1}{2}r$. Nel maggiore degli archi AB determinare un punto P in modo che, detta Q l'intersezione dell'arco considerato con la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAP}$, sia $2k$ il rapporto tra il rettangolo di lati AQ e BP ed il rettangolo di lati AP e BQ .

Esercizio 18. I due segmenti consecutivi AB e BC di misura $2r$ sono i diametri di due semicirconferenze γ_1 e γ_2 , situate nel medesimo semipiano rispetto alla retta AC . Con l'origine comune in B si conducano due semirette, che incontrino γ_1 nel punto P e γ_2 nel punto Q e che formino tra loro un angolo di $\frac{\pi}{3}$. Si determini l'angolo $\widehat{ABP}$ in modo che il segmento PQ abbia un rapporto k con il diametro delle semicirconferenze.

Esercizio 19. Nel triangolo equilatero ABC il cui lato misura a , l'altezza relativa a BC è AH ; sulla semiretta HB è dato il punto P in modo che sia $PH = AH$. Si conduca per P una semiretta che incontri i lati AB , AC del triangolo, rispettivamente, in M ed in N . Determinare l'angolo $\widehat{CPN}$, in modo che si abbia:

$$CP - BM = ka$$

Esercizio 20. Nel triangolo ABC l'angolo in B misura $\frac{\pi}{6}$ e quello in C misura x . Determinare il valore di x in modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC , si abbia:

$$BC + HC = kAC$$

Esercizio 21. In un cerchio di raggio r è data la corda AB , lato del triangolo equilatero inscritto. Inscrivere nel segmento circolare, che contiene il centro, un triangolo isoscele CDE , con la base CD parallela alla corda AB , in modo che si abbia:

$$2CD + 3EH = 2kr$$

dove H è il piede dell'altezza del triangolo relativa alla base CD

Esercizio 22. È data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e la semiretta tangente nel punto B e giacente nel medesimo semipiano della semicirconferenza rispetto alla retta AB . Determinare su questa tangente un punto P in modo che, detta Q l'ulteriore intersezione della retta AP con la semicirconferenza, si abbia:

$$2BQ + 3PQ = kBP$$

Esercizio 23. Nel triangolo acutangolo ABC è $\widehat{HCB} = \frac{\pi}{3}$, essendo H il piede dell'altezza relativa al lato AB . Determinare l'angolo $\widehat{HCA}$ in modo che sia:

$$AC + CB = k\sqrt{3}AB,$$

Esercizio 24. Dato il triangolo equilatero ABC , il cui lato misura ℓ , si determini sul lato BC un punto P in modo che, detta M l'intersezione della semiretta AP con la perpendicolare per B al lato AB , risulti:

$$AB^2 + BM^2 + MC^2 + CA^2 = k\ell^2$$

Problema 1. Risolvi, in un opportuno insieme $\mathbb{D}$ da indicare, le seguenti disequazioni:

a) $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{x}{\sqrt{x-1}};$

c) $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0;$

b) $\frac{\sqrt{|x|-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{x+3}{|x|+1};$

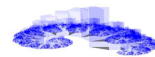
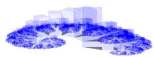
d) $\frac{2\sin(x)+1}{(2+\sin(x))^2} > 0.$

Problema 2. Sia $\tau : \begin{cases} \underline{x} = bx + ay \\ \underline{y} = -3x - \frac{a}{3}y \end{cases}$

a) ricava i valori dei parametri a, b che rendono τ una similitudine.

Fissati $a = 3$ e $b = 5$ ⁽¹⁾:

¹non fatevi ingannare, non è una delle soluzioni del punto precedente



b) ricava τ^{-1} ;

Detta $\mathcal{C}$ la regione di piano individuata da $\{(x, y) : (x - 3)^2 + (y + 4)^2 \leq 25\}$,

c) calcola l'area di $\tau(\mathcal{C})$.

Problema 3. Sono date due circonferenze di medesimo centro O . Da un punto P esterno ad entrambe si conducano le tangenti PA e PB all'una e PC e PD all'altra (con A e C dalla stessa parte rispetto alla retta PO).

Dimostra che il quadrilatero $ACBD$ è un trapezio isoscele.

Quesito 1. Dato il triangolo ABC in cui, $AB = 4$, $AC = 6$ e $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{4}$. Calcola :

i) perimetro e area;

ii) raggio delle circonferenza circoscritta.

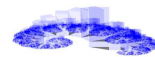
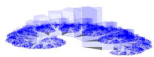
Quesito 2. Per quali valori dei parametri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ la trasformazione:

$$\phi : \begin{cases} \underline{x} = ax + by \\ \underline{y} = cx + dy \end{cases}$$

i) è una affinità;

ii) ha l'origine come punto unito;

iii) ha come retta unita $r : y = x$.



Quesito 3. Dimostra che la seguente proposizione:

“I triangoli ABC e $A'B'C'$ sono tali che $AB = A'B'$, $CA = C'A'$ e $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ allora i due triangoli sono uguali.”

è falsa.

Quesito 4. Dimostra che $\forall k \in \mathbb{N} : n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k^3 - 2k + 1}{k(k+1)} = \frac{n^3}{n+1}$$

Quesito 5. Disegna la funzione: $f(x) = ||x - 3| - 2| - 1|$.

Phi (Φ) is the Greek letter that represents the golden number, which is $1.618034\dots$. The reciprocal of this number is $0.618034\dots$ or, by rounding down, 0.618 , which in month and day notation equates to June 18.

$$\sqrt{\Phi + 2} - \Phi = \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1 + \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1 + \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1 + \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1 + \dots}}}} = 0.2840\dots$$

Srinivasa Aiyangar Ramanujan

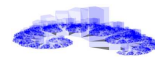
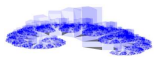


Per verificare che questa formula ha come risultato il valore approssimato scritto, è un mero gioco numerico, dimostrare che è vera, è matematica!

Esercizi con ✓ da svolgere assolutamente, gli altri esercizi da svolgere **solo** dopo aver risolto gli esercizi con ✓

Problema 1. Risolvi le seguenti disequazioni, specificando l'insieme di definizione⁽¹⁾.

¹nel caso di disequazione goniometria scegli un periodo



1) $\sqrt{1-x} \geq x+2 \checkmark$

4) $\frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)} \leq 0 \checkmark$

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x} - 5\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \leq 6 \checkmark$

5) $\sqrt{(\log_3 x)^2 - 9} \geq 1 + \log_3 x \checkmark$

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) \geq -2 \checkmark$

6) $|2\cos x - 1| \leq \sin x$

7) $x^{\log(\sin x)} \geq 1$

Problema 2 ($\checkmark$). Calcola l'equazione della parabola che interseca l'asse delle ascisse in $x = -1$ ed è tangente nel punto $A = (1, 1)$ alla circonferenza Γ di centro l'origine.

Problema 3. Calcola $a, b > 0$ dell'ellisse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$. Sapendo che la trasformazione:

$$\tau : \begin{cases} X = 2x \\ Y = \frac{y}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ è tale che } \tau(\mathcal{E}) = \Upsilon, \text{ dove } \Upsilon : X^2 + Y^2 = 5$$

Problema 4 ($\checkmark$). Dato un triangolo ABC , per un punto D del lato AB si conducano i segmenti DM e DN paralleli rispettivamente ai lati BC e AC . ($M \in AC$ e $N \in BC$).

$$\text{Dimostra che } \frac{DM}{BC} + \frac{DN}{AC} = k^{(2)}$$

Problema 5. In una circonferenza è inscritto un triangolo ABC con il lato AB parallelo ad una corda data MN (con A ed M dalla stessa parte rispetto all'asse del segmento AB); le rette AB e CN si intersecano in un punto P .

a) Costruisci la figura;

b) dimostra che $\frac{CA}{CM} = \frac{CP}{CB}$.

Problema 6 ($\checkmark$). Una macchina termica a gas perfetto, operante tra due sorgenti a temperatura $T_1 = 500 \text{ K}$ e $T_2 = 200 \text{ K}$, esegue il ciclo in cui la trasformazione $A \rightarrow B$ è un'isoterma reversibile a temperatura T_1 , la $B \rightarrow C$ è un'adiabatica irreversibile, la $C \rightarrow D$ un'isoterma reversibile a temperatura T_2 e la $D \rightarrow A$ un'adiabatica reversibile.

Il fluido termodinamico è costituito da una mole di gas monoatomico $C_V = \frac{3}{2}R$. Sapendo che $\frac{V_B}{V_A} = 2$ e che $\frac{V_C}{V_D} = 2.3$:

1) rappresenta nel piano pV il ciclo;

2) calcola il rendimento della macchina termica.

Problema 7. A uniform disc of radius $R = 20 \text{ cm}$ has a round cut as shown in Fig. 9. The mass of the remaining (shaded) portion of the disc equals $m = 7.3 \text{ kg}$. Find the moment of inertia of such a disc relative to the axis passing through its centre of inertia and perpendicular to the plane of the disc.

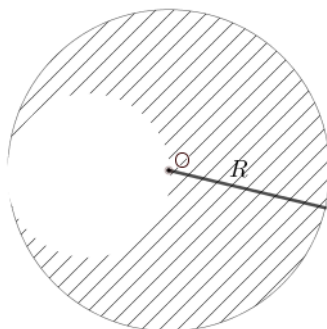
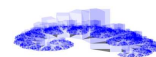
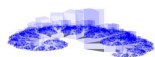


Figura 9: A uniform disc

² k è una costante



Problema 8 (✓). Una massa m viene lanciata lungo un piano inclinato (inclinazione $\alpha = \frac{\pi}{6}$). Il lancio della massa viene eseguito da una molla di costante elastica k compressa di x_0 cm. Calcola:

- 1) il lavoro svolto da un agente esterno per comprimere la molla;
- 2) a che altezza si ferma la massa (piano scabro coefficiente di attrito μ)

Quesito 1 (✓). Quando una strada sale di 20 m, su una distanza orizzontale di 100 m, si dice che la pendenza è del 20%. Quanto vale la pendenza di un pendio inclinato di 55° (rispetto all'orizzontale)?

Quesito 2. Disegna nel piano di Gauss la rappresentazione delle $z = x + iy$ tali che:

$$zz^* - z^* + iz + \operatorname{Re}(z + 2) - \operatorname{Im}(z + 3i) = 0$$

Quesito 3 (✓). In Italia il 44.99 % della popolazione maschile soffre di una qualche malattia cronica. Sapendo che il 48.54 % della popolazione italiana è maschile e che il 49.75 % della popolazione soffre di una malattia cronica, qual è la probabilità che un malato cronico sia donna?

Quesito 4. Della funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(e^{\sqrt{\lg^2 x}}\right)\right)$ indica il dominio, il segno e traccia il grafico.

Quesito 5. Disegna il grafico delle seguenti funzioni:

Funzione 1.

$$f_1(x) = \log\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right) \quad \checkmark$$

Funzione 2.

$$f_2(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right) + \frac{\pi}{2}$$

costante universale dei gas	$R = 8.31 \frac{J}{K \cdot mole} = 0.082 \frac{dm^3 \cdot atm}{K \cdot mole}$
costante di Boltzmann	$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
fattore di conversione da cal a J	$1 cal = 4.186 J$
fattore di conversione da $\frac{N}{m^2}$ a atm	$1 \frac{N}{m^2} = 9.869 \cdot 10^{-6} atm$

40 Ho lavorato ... certo che sì

Problema 1. Risolvi in un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

- i) $\frac{3^x \cdot 2^{1+x}}{3 \cdot 2^{x-1}} > \sqrt{\frac{6^x}{3^{x-1}}}$
- iii) $\operatorname{tg}^2(x) - (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg}(x) - \sqrt{3} < 0;$
- ii) $\log_4 x^2 > \log_4(2 - x);$
- iv) $\log(x - \sqrt{1 - x^2}) < 0;$

Problema 2. Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano per i quali il rapporto fra la distanza dal punto $F = (2, 4)$ e dalla retta $d: 2x + y + 2 = 0$ vale 1.

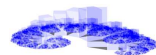
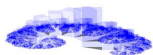
Spiega perché si tratta di una parabola. Verifica che la parabola trovata è tangente alle rette $r: 2x + 1 = 0$ e $s: y + 1 = 0$ e trova i punti di tangenza A e B . Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC (dove $C = r \cap s$)

Problema 3. Ricava le $z \in \mathbb{C}$ tali che:

- i) $\operatorname{Im}(z^2) = (\operatorname{Im}(z))^2;$
- ii) $\arg(z^2) = (\arg(z))^2.$

Problema 4. Disegna il grafico di: $j(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x + 2}$

Problema 5. Calcola l'incremento: $k(x) = \sin(\sqrt{x + x^4})$



40.1 Aiutino 1

Esercizio 25. In una “famosa” classe $\mathbb{C}$, 10 alunni suonano uno strumento A , 10 praticano sport B , 15 giocano con i videogiochi C , inoltre si ha che: $|A \cap B| = 10$, $|A \cap C| = 4$, $|C \cap B| = 8$ e $|A \cap B \cap C| = 5$.

Quanti sono gli alunni della classe?

Soluzione.

$$|\mathbb{C}| = \underbrace{|A| + |B| + |C|}_{10+10+15=35} - \left(\underbrace{|A \cap B| + |A \cap C| + |C \cap B|}_{10+4+8=22} \right) + \underbrace{|A \cap B \cap C|}_5 = 18$$

□

41 Ho pensato ... certo che sì

Problema 6. È assegnato un alfabeto composto da 13 simboli diversi.

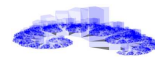
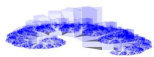
Se scelgo, a caso, una parola di otto lettere, qual è la probabilità che contenga almeno un simbolo ripetuto esattamente 3 volte?

41.1 Aiutino 2

```
def duplicati(testo) :  
    preso = False  
    t = 0  
    for k in range(1,14) :  
        rip = testo.count(k)  
        # conteggio una volta sola le triple  
        # in quanto nel testo troviamo almeno  
        if rip == 3 :  
            preso = True  
    if preso :  
        t = 1  
    return t
```

```
prove = 50000  
n = 0  
for k in range(prove) :  
    parola = []  
    for k in range(8) :  
        x = random.randint(1,13)  
        parola.append(x)  
    n += duplicati(parola)  
p = n/prove  
N(p,4)
```

0.2158



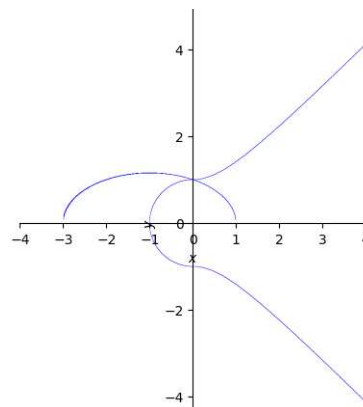
42.1 Aiutino 3

42 Ho analizzato con cura ... certo che sì

Problema 7. Sono date le seguenti relazioni: $x|x| - y^2 = -1$ e

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{3 - x^2 - 2x}.$$

- Determinato il dominio e il codominio di ciascuna di esse, indica se sono funzioni?
- Verifica che le curve si incontrano solo nel punto $A = (0, 1)$.



43 Ho studiato geometria ... certo che sì

Problema 8. Le lunule di Ippocrate, sono ottenute a partire da un triangolo rettangolo ABC , le semicirconferenze di diametri i cateti e l'ipotenusa. Dimostra che l'unione delle due lunule è equivalente al triangolo ABC .

44 Non presenti nel pacchetto feste-24-25, quindi ... in più

Problema 9. Dimostrare che in un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stanno come i quadrati costruiti sui cateti.

Problema 10. Determina il luogo $\mathcal{C}$ delle $z \in \mathbb{C}$ tali che la distanza di z da $w_1 = -3$ sia pari alla metà della distanza di z da $w_2 = 3$. Rappresenta $\mathcal{C}$ nel piano di Gauss.

45 Mate python

Problema 1. Sia $f(x) = x^3 e^{-x^2}$,

- dimostra che $f(x)$ è dispari;
- se x_1 è soluzione dell'equazione $f(x) = \frac{1}{5}x$ quale fra le seguenti è sicuramente soluzione?

i) $1 - x_1$;

iii) $-x_1$;

ii) $-f(x_1)$;

iv) $-\frac{f(x_1)}{x_1}$

- $f(x)$ può assumere valori molto grandi (leggi ∞)?

Indica un ( python) procedimento che ti permetta di trovare le intersezioni, se esistono, fra il grafico $\mathcal{G}_f$ di $f(x)$ e la retta di equazione $y = \frac{1}{5}x$.

Considera ora la parte di piano in grigio $\mathcal{A}$ della figura 10, racchiusa nell'intervallo $I^2 = [0, 3] \times [0, 1]$, dove la curva rappresentata è una funzione nota $f(x)$. Indica un ( python) procedimento che ti permetta di calcolare l'area di $\mathcal{A}$.

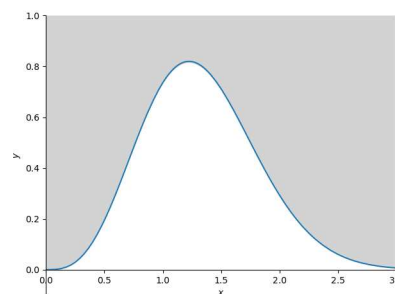
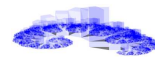
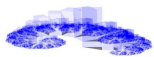


Figura 10: Area da stimare



46 Fis

Problema 2. Una massa m è avvitata su una lunga barra filettata (asta), l'asta è libera di oscillare vincolata ad un estremo.

Dati

- Asta: lunghezza ℓ , massa M , passo filetto dh (se il dado fa un giro completo si sposta in “su” rotazione antioraria, o in “giù”, rotazione oraria) di dh
- Dado: si può pensare punto materiale, massa m .

Il periodo di oscillazione dell'asta con il dado è dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M_{tot}g\ell_{cm}}} \quad (3)$$



a) cosa rappresentano in (3) I , ℓ_{cm} ed M_{tot} ;

b) per diminuire il periodo quale fra le seguenti strategie è corretta?

- | | |
|---|--|
| i) avvitare il dado (rotazione antioraria); | iii) aumentare l'ampiezza di oscillazione; |
| ii) svitare il dado (rotazione oraria) | iv) diminuire l'ampiezza di oscillazione. |

Indica un ()procedimento che ti permetta di calcolare la posizione del centro di massa ogni rotazione completa del dado. Puoi decidere tu la posizione iniziale del dado.

Se in questo “rustico” pendolo sono presenti attriti, che si possono riassumere in una forza opposta alla velocità (“solito” $F = -bv$). Costruisci un ()procedimento in grado di rappresentare un diagramma orario tempo spazio.

47 Ripasso

47.1 Operazioni

```
# Somma
18+59
```

somma con $+$

```
# Prodotto
18*59
```

somma con $*$

```
s = 18+59
```

assegnazione ad una
variabile

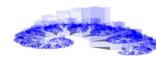
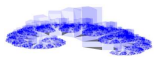
```
e = s**p
```

potenza con $**$

47.2 Operazioni più “fini” uso di



```
Carichiamo la libreria from sympy import *
init_printing()
```



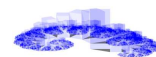
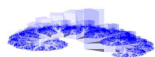
47.2.1 Radici

Primo modo	<pre>r1 = root(-8,3) r1</pre>
Secondo modo	<pre>r2 = real_root(-8,3) r2</pre>

47.2.2 Funzioni

Definire una funzione	<pre>def f(x) : return x**2-4*x</pre>
Visualizzare la funzione	<pre>x = symbols('x') f(x)</pre>
“Graficare” la funzione	<pre>Gf = plot(f(x), (x,-1,5), show = False) Gf.show()</pre>
“Graficare” più funzioni	<pre>[...] Gf.append(Gf1[0]) Gf.show()</pre>

Esercizio 26. Disegnare la parabola che passa per $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$ ed ha per asse la retta $x = -2$ e la retta tangente alla parabola in B .



47.3 Disequazioni

assegnare ad una variabile una disequazione e, poi visualizzarla

```
dis1 = (x**2-3*x)/(x**2-4) >= 3
dis1
```

far risolvere la disequazione

```
solve_univariate_inequality(dis1, x, relational=False)
```

47.3.1 La libreria random

Con l'uso della libreria random generiamo due coefficienti casuali a e b , così possiamo avere la “nostra” disequazione.

```
import random
a = random.randint(-5,8)
b = random.randint(-3,5)
```

Esercizio 27. Risolvi con carta e penna la disequazione: $x - \sqrt{x+a} \geq b$ e poi verifica il risultato.

47.4 Disequazioni goniometriche

“costruire” la circonferenza goniometrica e poi visualizzare l'equazione

```
y = symbols('y')
CircG = Eq(x**2+y**2,1)
CircG
```

Disegnare la circonferenza goniometrica

```
GcG = plot_implicit(CircG, (x,-1.5,1.5), (y,-1.5,1.5), show=False)
GcG.aspect_ratio = (1,1)
GcG.show()
```

Esercizio 28. Prima costruisci la soluzione grafica e poi quella algebrica:

- i) $2 \cos(x) - \sqrt{3} \leq 0$
- ii) $\sin(x) \geq \frac{1}{3}$
- iii) $\cos(x) (2 \sin(x) - \sqrt{2}) \leq 0$
- iv) $2 \cos^2(x) - 1 \geq 0$
- v) $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) \leq 1$

Esercizio 29 (Extra). Prima soluzione grafica e poi algebrica:

- i) $\sqrt[3]{x-1} \leq x+1$
- ii) $\sqrt{x-1} \geq x+1$
- iii) $\cos^2(x) - \sin^2(x) \leq 0$

Esercizio 30. Nel triangolo ABC l'angolo in $\widehat{B} = \frac{\pi}{6}$ e $\widehat{C} = x$. Determinare il valore di x In modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC , sia:

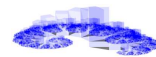
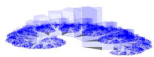
$$BC + HC = kAC \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\left(\text{Una soluzione } \frac{\sqrt{3}}{2} < k \leq 2 \text{ due soluzioni } 2 < k \leq \sqrt{7} \right)$$

Esercizio 31. In un cerchio di raggio r è data la corda AB , lato del triangolo equilatero inscritto. Inscrivere nel segmento circolare, che contiene il centro, un triangolo isoscele CDE , con la base CD parallela alla corda AB , in modo che si abbia:

$$2CD + 3EH = 2kr \quad k \in \mathbb{R}^+$$

dove H è il piede dell'altezza del triangolo relativa alla base CD .



$$\left(\text{Una soluzione } 0 < k \leq \frac{9 + 4\sqrt{3}}{4} \right)$$

Esercizio 32. È data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e la semiretta tangente nel punto B e giacente nel medesimo semipiano della semicirconferenza rispetto alla retta AB . Determinare su questa tangente un punto P in modo che, detta Q l'ulteriore intersezione della retta AP con la semicirconferenza, si abbia :

$$2BQ + 3PQ = kBP \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$(\text{Una soluzione } 2 \leq k \leq 3 \text{ due soluzioni } 3 < k \leq \sqrt{13})$$

Esercizio 33. Nel triangolo acutangolo ABC è $\widehat{HCB} = \frac{\pi}{3}$, essendo H il piede dell'altezza relativa al lato AB . Determinare l'angolo $\widehat{HCA}$ in modo che sia:

$$AC + CB = k\sqrt{3}AB \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\left(\text{Una soluzione } \frac{3 + \sqrt{3}}{6} < k < 1 \right)$$

Esercizio 34. Dato il triangolo equilatero ABC , il cui lato misura ℓ , si determini sul lato BC un punto P in modo che, detta M l'intersezione della semiretta AP con la perpendicolare per B al lato AB , risulti:

$$AB^2 + BM^2 + MC^2 + CA^2 = k\ell^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\left(\text{Una soluzione } 3 < k \leq 6 \text{ due soluzioni } \frac{21}{8} \leq k \leq 3 \right)$$

Esercizio 35. In un triangolo ABC , l'angolo $\widehat{B}$ è doppio dell'angolo $\widehat{C}$. Sapendo che è $BC = a$, e che, dette BH e CL , rispettivamente, le altezze del triangolo uscenti dai vertici B e C , si ha:

$$BH^2 + CL^2 = ka^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\left(\text{Una soluzione } 0 < k \leq \frac{3}{2} \text{ due soluzioni } \frac{3}{2} < k \leq \frac{25}{16} \right)$$

Esercizio 36. Disegnata la parabola di equazione $y^2 = 3x + 4$, determinarne i punti che distano di un segmento lungo a punto $(1, 0)$. Discussione.

Supposto poi $a = \frac{\sqrt{85}}{4}$, verificare che i punti soluzione sono quattro e determinare l'area del quadrilatero convesso che li ha per vertici.

Esercizio 37. Scritta l'equazione della parabola di vertice $A = (4, 0)$, tangente in A all'asse x e passante per $B = (0, 2a)$, trovare i punti P del suo arco parabolico AB le cui distanze dagli assi coordinati abbiano per somma un segmento di misura ka .

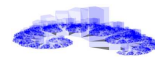
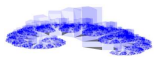
Esercizio 38. Sono date la circonferenza e le rette aventi equazioni $x^2 + y^2 = r^2$, $2y = -r\sqrt{3}$, $x = y\sqrt{3}$. Tali rette incontrano la circonferenza rispettivamente nei punti A , B e C , D . Detto k un numero positivo, si determini un punto P del segmento CD tale che si abbia:

$$AP^2 + PB^2 = kAB^2$$

Esercizio 39. Date le curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di rispettive equazioni:

$$y = -\frac{x^2 - a}{2} \quad y = \frac{b}{x}$$

si determini la relazione che deve sussistere fra a e b affinché esse si incontrino in un punto P_1 del primo di quadrante, avente per ascissa 2. Indicate con P_2 e P_3 le ulteriori intersezioni delle due curve e condotte per esse le tangenti alla $\mathcal{C}_2$, si denotino con T_2 e T_3 i punti di tali tangenti che hanno ordinata nulla e | o se ne calcolino le ascisse. Si determini infine a in modo che la distanza fra T_2 e T_3 sia $4k(a^{-2})$, essendo k un numero positivo dato.



Esercizio 40. Sono date le due parabole di equazioni:

$$y = 2x^2 + x + 1 \quad y = x^2 + 3x + 2$$

Detto $A = (-1, 0)$ uno dei due punti che esse hanno in comune e considerata una retta r passante per A e non parallela all'asse delle ordinate, siano:

- B l'ulteriore intersezione di r con la prima parabola,
- C l'ulteriore intersezione di r con la seconda parabola,
- D l'intersezione di r con l'asse delle ordinate.

Si determini il coefficiente angolare m di r in modo che risulti:

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{k}{AD} \quad k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 41. Dato il quadrante AOB di circonferenza di centro O e raggio r , si prenda sulla semiretta OA un segmento $AC = r$. Determinare sull'arco AB un punto P tale che l'area del quadrilatero $OCPB$ stia in rapporto uguale a $k \in \mathbb{R}^+$ con il quadrato del raggio.

Esercizio 42. Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC , l'angolo $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$. Determinare su BC un punto Q in modo che risulti:

$$AQ + QC = kAC \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 43. Data una circonferenza di centro O e raggio r e una sua corda AB tale che $\widehat{AOB} = \frac{2}{3}\pi$, si consideri un'altra corda CD parallela ad AB con C e D appartenenti al minore dei due archi AB , in modo che le dimensioni del rettangolo avente per lato CD ed il lato opposto su AB stiano tra loro nel rapporto $k \in \mathbb{R}^+$.

Esercizio 44. È data una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$. Condurre dal punto A due corde AC e AD in modo che $\widehat{COA} = \frac{\pi}{3}$ e sempre dal punto A , la semiretta AE tangente in A alla semicirconferenza. Determinare l'angolo $\widehat{EAC}$ in modo che risulti:

$$AC^2 + AD^2 = kr^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 45. Dato il triangolo equilatero ABC di lato a , condurre con centro in A la circonferenza di raggio $\frac{a}{2}$ che interseca il lato AB in M ed il lato AC in N . Determinare sull'arco MN interno al triangolo un punto P tale che:

$$PB = kPC \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 46. Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$ e centro O , si conduca una corda AC tale che $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{6}$. Se M è un punto di tale corda, determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{MBA}$ in modo che, detta PQ la corda della circonferenza di cui M è punto medio, si abbia:

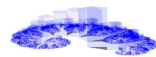
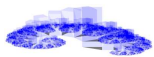
$$PQ^2 = 4kMB^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 47. Siano AB , BC , CD tre corde consecutive di una circonferenza di raggio r , di lunghezza rispettivamente r , $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2}$. Determinare sul minore dei due archi AD un punto M in modo che risulti:

$$AM^2 + MD^2 = kMC^2 \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 48. In una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$ si considerino due punti C e D con C più vicino ad A , in modo che $\widehat{COD} = \frac{\pi}{3}$. Dette H e K le proiezioni di C e D sul diametro AB , determinare le posizioni di C e D in modo che si abbia:

$$HK = kCD \quad k \in \mathbb{R}^+$$



Problema 1. Un prisma retto ha due basi uguali e parallele $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E un punto dello spigolo AD tale che $DE = \frac{2}{3}AD$, sia, inoltre, F un punto preso sul prolungamento di $D'C'$, oltre C' , tale che $C'F = \frac{1}{2}D'C'$.

Dimostra che $A'C$ ed EF si incontrano in un punto G , e ricava $\frac{CG}{GA'}$ e $\frac{EG}{GF}$.

Problema 2. Il tetraedro $DABC$ ha vertice D e base ABC . Siano E , F e G i punti medi rispettivamente di BC , CA e AB si ha che DF e DG sono perpendicolari ad AC e AB e il triangolo ABC è rettangolo in A .

Dimostra che DE è perpendicolare al piano contenente la base ABC .

Problema 3. AB , BC e CD sono tre spigoli di un cubo di diagonale AD .

Ricava l'ampiezza dell'angolo diedro individuato dai piani BCD e ACD .