ARITMETICA

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ MCD m.c.m.

Criteri di divisibilità: 2 3 4 5 7

$a_1 a_2 \dots a_k \rightarrow a_1 a_2 a_3 - 2a_4$

2 3 2 7

Es. Trovare il MCD $n^5 - n$ per $n \geq 2$.

$$n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1)$$
$$= n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

6 o 30 ?

$n = 5k+1$ ✓

$n = 5k$ ✓

$n = 5k+4$ ✓

$n = 5k+2$ ✓

$n = 5k+3$ ✓

$$(5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4$$
$$(5k+3)^2 = 25k^2 + 30k + 9$$

$\boxed{30}$

Es. Ci sono solo monete che valgono 3 o 7.
È possibile comprare cose con p qualunque?

$7 - 2 \cdot 3 = 1$ $17 \cdot 7 - 34 \cdot 3 = 17$

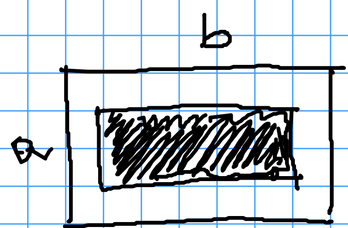
3, 9 $n \cdot 3 + m \cdot 9 =$ $n, m \in \mathbb{Z}$

357   523 $m\,357 + n\,523 = 1$

$$\begin{aligned}
523 &= 1\cdot \underbrace{357} + \underbrace{166} \\
357 &= 2\cdot 166 + 25 \\
166 &= 6\cdot 25 + 16 \\
25 &= 1\cdot 16 + 9 \\
16 &= 1\cdot 9 + 7 \\
9 &= 1\cdot 7 + 2 \\
7 &= 3\cdot 2 + \boxed{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= 7 - 2\cdot 3 \\
&= 7 - 3\cdot(9-7) \\
&= 4\cdot 7 - 3\cdot 9 \\
&= 4(16-9) - 3\cdot 9 \\
&= 4\cdot 16 - 7\cdot 9
\end{aligned}$$

E5.



Per quali a, b
$A_{\square} = A_{\blacksquare}$?

$$2(a-2)(b-2) = ab$$ RICAVARE

$$2ab - 4a - 4b + 8 = ab$$

$$-4b + 8 = a(-b+4) \qquad b \neq 4$$

$$a = \frac{-8+4b}{b-4} = \frac{4(b-4)+8}{b-4}$$

$$= 4 + \frac{8}{b-4}$$

$b-4 =$ 1	$b=5$	$a=12$
2	$b=6$	$a=8$
4	$b=8$	$a=6$
8	$b=12$	$a=5$
-1	~~$b=3$~~	~~$a=-4$~~
-2	~~$b=2$~~	~~$a=0$~~
-4	X	
-8	X	

Es. Sol intere di

$$a = \frac{b^2+3b+1}{b-4}$$

$$\begin{array}{r|l} b^2+3b+1 & b-4 \\ \hline -b^2+4b & b+7 \\ \hline 7b+1 & \\ -7b+28 & \\ \hline 29 & \end{array}$$

$$= \frac{(b+7)(b-4)+29}{b-4}$$

$$= \underbrace{b+7} + \frac{29}{b-4}$$

$$b-4 = \begin{array}{c} -29 \\ -1 \\ 1 \\ 29 \end{array}$$

Es. $x^2 - y^2 = 51$ FATTORIZZARE

$\underbrace{(x-y)}\underbrace{(x+y)} = 51$ $51 = 3 \cdot 17$

$$\begin{cases} x-y = -1 \\ x+y = -51 \end{cases} \quad \begin{array}{c} -3 \\ -17 \end{array} \quad \begin{array}{c} -17 \\ -3 \end{array} \quad \begin{array}{c} -51 \\ -1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-y = A \\ x+y = B \end{cases} \qquad x = \frac{A+B}{2} \qquad y = \frac{B-A}{2}$$

Es. $5x^2 = 35y^4 + 8$ $5\underbrace{(x^2 - 7y^4)} = 8$

Es. $x^2 - y^2 = 26$ GUARDARE I RESTI

$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$
	-3	-2	-1
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

$4k+1 \quad 4k+2$

$4(k+l)+3$

$4k+3 \quad 4l+2$

$$x = 4k \to 0$$
$$x = \underline{1} \to 1$$
$$x = \underline{2} \to 0$$
$$x = \underline{3} \to 1$$

$$x^2 - y^2 = 26$$

0	1	$\to$	3
0	0	$\to$	0
1	0	$\to$	1
1	1	$\to$	0

2

Es. $3^a - 2^b = 1$ $\quad a, b$ positivi interi

Resti diviso 3 $\quad 2^b$

b	r
1	2
2	1
3	2
4	1
⋮	

b dispari $\to$ resto 2

b pari $\to$ resto 1

$\underline{b \text{ dispari}}$

$$\boxed{b = 1, \quad a = 1}$$

$b > 1$

Resti diviso 4 $\quad 3^a$ resto 1 diviso 4 ?

a	r
1	3
2	1
3	3

a pari $\qquad a = 2k \qquad 3^{2k} - 2^b = 1$

$$3^{2k} - 1 = 2^b$$

$$(3^k - 1)(3^k + 1) = 2^b$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$2 \qquad \qquad 4$$

$$1 \quad \underbrace{2 \quad 4} \quad 8 \quad 16 \quad 32$$

$k = 1 \qquad \boxed{b = 3 \quad , \quad a = 2}$

Polinomi a coefficienti interi

$$p(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1 \cdot \boxed{x^0}$$

$$p(2) = 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 1$$

$p(a) = 0 \qquad a$ RADICE

a, b interi $\qquad$ $\boxed{P(a) - P(b) \text{ è un multiplo di } a - b}$

$a = 7, \; b = 3 \qquad 2\,7^2 - 2 \cdot 3^2 = 2(7^2 - 3^2)$

$$= 2\,(\underline{7-3})(7+3)$$

$$4 \cdot (7^3 - 3^3) = 4\,(7-3)($$

$$\underbrace{x^n - y^n} = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$$

Es. $\quad p(2016) = 0 \;, \quad p(0) = 8 \;?$

$a = 2016, \; b = 0 \qquad 2016$ divisore di $p(2016) - p(0) = -8$

Es. $p(1)=7$, $p(5)=7$. Può essere $p(7)=13$?

$a=7$, $b=1$ $\qquad$ 6 divisore di $p(7)-p(1)=6$

$\qquad\qquad$ 2 $\qquad\qquad$ 6

Teo (RUFFINI): p polinomio. Se α radice allora

$$p(x)=(x-\alpha)\,q(x)$$

Caso importante: se $p(x)$ ha coeff. interi, allora anche $q(x)$ ha coeff. interi.

$$\begin{aligned} s(x) &= p(x)-7 \\ &= (x-1)\,t(x) \\ &= (x-1)(x-5)\,u(x) \end{aligned}$$

1 e 5 sono radici di s

5 radice di t

$t(x)=(x-5)\,u(x)$

$$p(x)=(x-1)(x-5)\,u(x)+7$$

$$\begin{aligned} p(7) &= 6\cdot 2\;u(7)+7 \\ &= \underbrace{12\,u(7)+7}_{\text{resto } 7} \overset{?}{=} 13 \end{aligned}$$

↑ resto 1 $\qquad$ diviso 12

Es 1

$62ab427$ multiplo di 99

$8+a+b+13 = a+b+21$ multiplo di 9

$a+b+3$ multiplo di 9

$7-2+4-b+a-2+6 = a-b+13$ multi di 11

$a-b+2$ multiplo di 11

1) $a+b+3 = 9$ a) $a-b+2 = 0$

2) $a+b+3 = 18$ b) $a-b+2 = 11$

1a) $a+b = 6$ $a-b = -2 \rightarrow \boxed{a=2,\ b=4}$

1b) $a+b = 6$ $a-b = 9$

2a) $a+b = 15$ $a-b = -2$

NO sol intere

2b) $a+b = 15$ $a-b = 9$ $a = 12,\ b = 3$

Es 2 $P(a) - P(b)$ multiplo di $a-b$

$P(c) = 0$ $a = c$ $b = 0$

$\boxed{0 - d}$ multiplo di c $\overset{\text{quindi}}{\Longrightarrow}$ c è dispari

$0 - D$ multiplo di $c-1$ quindi $c-1$ dispari

Es 3

$$\frac{15n+2}{20n+3}$$ d divisore di entrambi

quindi d divisore di $3\cdot(5n+1)$

d divisore di $15n+3-15n-2=1$

Sì, è sempre ridotto ai min. termini.

Es. 4 $\rightarrow x^3+5y^3+25z^3=5xyz$

$x=5x_1$ $\qquad x^3=125x_1^3$

$$125x_1^3+5y^3+25z^3=25x_1yz$$

$$\rightarrow 25x_1^3+y^3+5z^3=5x_1yz$$

$y=5y_1$

$$5x_1^3+25y_1^3+z^3=5x_1y_1z$$

$z=5z_1$

$$x_1^3+5y_1^3+25z_1^3=5x_1y_1z_1$$

Se (x,y,z) è soluzione allora $\left(\frac{x}{5},\frac{y}{5},\frac{z}{5}\right)$ è ancora soluzione.

Allora $\left(\frac{x}{25},\frac{y}{25},\frac{z}{25}\right)$ $\qquad \left(\frac{x}{5^c},\frac{y}{5^c},\frac{z}{5^c}\right)$

$x=2^a3^b5^c\ldots$ $\qquad$ è soluzione

No soluzioni

$(x,y,z)=(0,0,0)$

Es 5

$b_1 = a_1$ $\quad i=1 \quad j=7$

$b_2 = a_1 + a_2$

$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$ $\quad b_7$ multiplo di 17

$\vdots$

16 resti possibili

$b_{17} = a_1 + \dots + a_{17}$

17 numeri

Almeno due numeri che hanno lo stesso resto divisi per 17

$b_i \quad b_j \qquad j > i$

$b_j - b_i$ è multiplo di 17

$a_{i+1} + \dots + a_j$

Es 6 $\quad 5p + 49 = a^2 \qquad p$ primo

$5p = a^2 - 49$

$= (a-7)(a+7)$

$1 \quad 5 \quad p \quad 5p$

$-1 \quad -5 \quad -p \quad -5p$

$\begin{cases} a-7=1 \\ a+7=5p \end{cases} \qquad \begin{cases} a-7=5 \\ a+7=p \end{cases} \qquad \begin{cases} a-7=p \\ a+7=5 \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{a-7=5p} \\ a+7=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-7= \end{cases} \qquad \dots$

Esercizio 7 $\quad \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{3} \qquad m, n \neq 0$

$$3n + 3m = mn$$

RICAVI

$$3m = n(m-3)$$

$$n = \frac{3m}{m-3} \qquad m \neq 3$$

$$n = \frac{3(m-3) + 9}{m-3} = 3 + \frac{9}{m-3}$$

$$m-3 = \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 9 \\ -1 \\ -3 \\ -9 \end{cases} \qquad m = \begin{cases} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 2 \\ 0 \leftarrow \\ -6 \end{cases} \qquad n = \begin{cases} 12 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \\ 2 \end{cases}$$

$(4, 12) \quad (6, 6) \quad (12, 4) \quad (2, -6) \quad (-6, 2)$

Es 8 $\quad m^2 - 2^n = 1 \qquad n > 1$

$$m^2 - 1 = 2^n$$

$$(m-1)(m+1) = 2^n$$

$$\boxed{\begin{matrix} m = 3 \\ n = 3 \end{matrix}}$$

$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$