

Aritmetica ed Algebra

Pordenone, 2 febbraio 2017

Esercizio 1. Per quali numeri interi n l'espressione $\frac{n^2+4}{n+4}$ è ancora un numero intero?

Esercizio 2. Definiamo una successione nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 7a_n + 1 \end{cases}$$

Qual è il minimo k tale per cui $30 \mid a_k$?

Esercizio 3. Trovare il numero di terne ordinate di numeri reali (x, y, z) che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 27 \\ xyz = 5 \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia $p(x)$ un polinomio tale che $p(-x) = -p(x)$ e tale che diviso per $(x - 2)$ dà resto 5. Qual è il resto della divisione di $p(x)$ per $(x^2 - 4)$?

Esercizio 5. Sia k un intero positivo. Poniamo $a_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 1$, $a_{n+1} = k(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 1$. Qual è il più piccolo valore di k tale che a_{2016} sia multiplo di $3^{4031} \cdot 7^{4027}$?

Esercizio 6. Sia a_1, a_2, \dots una sequenza di interi positivi tali che a_{i+1} è il numero di divisori positivi di a_i , per ogni $i \geq 1$. Supponiamo che $a_2 \neq 2$. Dimostrare che esiste un indice m tale che a_m sia un quadrato perfetto.