ALGEBRA e ARITMETICA

Correzione esercizi

Es. 1

$$\frac{n^2+4}{n+4} \in \mathbb{Z}$$

• 1° MODO: $n+4 \mid n^2+4$ $\qquad n^2+4 = (n+4)(n-4)+20$

$$\frac{n^2+4}{n+4} = \frac{(n+4)(n-4)+20}{n+4} = \underbrace{n-4}_{\text{intero}} + \frac{20}{n+4}$$

Per $\frac{n^2+4}{n+4} \in \mathbb{Z}$, basta $\frac{20}{n+4} \in \mathbb{Z}$. $\qquad n+4 = 1, 2, 4, 5, 10, 20, -1, -2, -4, -5, -10, -20$

Ricava

• 2° MODO: $(n^2+4, n+4) = n+4$

$$(n+4,\ n^2+4-n(n+4)) = (n+4,\ 4-4n) = (n+4,\ 4-4n+4(n+4)) = (n+4,\ 20)$$

Trovo $n+4 \mid 20$.

Es. 2

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 7a_n + 1 \end{cases} \qquad n > 1$$

minimo k : $30 \mid a_k$. $\quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad$ Trovare quando $2 \mid a_k$, $3 \mid a_k$, $5 \mid a_k$.

• Quando $2 \mid a_k$?

Se a_n è pari, $a_{n+1} = 7a_n + 1$ è dispari.
Se a_n è dispari, a_{n+1} è pari.

I pari nella successione si alternano: $2 \mid a_k$ se k è pari.

• Quando $3 \mid a_k$? Modulo 3, quando $a_k \equiv 0 \pmod 3$?

$a_1 \equiv 1 \pmod 3$, $\quad a_2 \equiv 7 \cdot 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$ $\quad a_3 \equiv 7a_2 + 1 \equiv 7 \cdot 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$

$a_4 \equiv 7a_3 + 1 \equiv 7 \cdot 0 + 1 \equiv 1 \pmod 3$ $\quad a_5 \equiv 2 \pmod 3$, $\quad a_6 \equiv 0 \pmod 3$ ...

$3 \mid a_k$ quando $3 \mid k$. $\Rightarrow 6 \mid k$.

• Quando $5 \mid a_k$?

$a_1 \equiv 1 \pmod 5$, $\quad a_2 \equiv 7 \cdot 1 + 1 \equiv 3 \pmod 5$, $\quad a_3 \equiv 3 \cdot 7 + 1 \equiv 2 \pmod 5$
$a_4 \equiv 7 \cdot 2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ $\quad a_5 \equiv 7 \cdot 0 + 1 \equiv 1 \pmod 5$

$$1 \to 3 \to 2 \to \overset{a_4}{0} \to 1 \to 3 \to 2 \to \overset{a_8}{0} \to \dots$$

$5 \mid a_k$ se $4 \mid k$. $\Rightarrow 12 \mid k$. $\qquad k = 12$ è il minimo

Es. 3 $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=27 \\ xyz=5 \end{cases}$ (x,y,z) reali

Una soluzione è $(1,1,5)$ (e permutazioni). Però è l'unica?

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$$

$$\underset{49}{(x+y+z)^2} = \underset{27}{x^2+y^2+z^2} + 2(xy+yz+xz)$$

Ricavo: $\begin{cases} xy+yz+zx = 11 \\ xyz=5 \\ x+y+z=7 \end{cases}$

x,y,z sono radici del polinomio $a^3 - 7a^2 + 11a - 5$.

Ha al più 3 radici $\Rightarrow$ $(1,1,5)$, $(1,5,1)$ e $(5,1,1)$ sono le uniche.

Es. 4 $p(-x) = -p(x)$ resto divisione per $x-2$ è 5

$p(x) = q(x)(x-2) + 5$
$p(2) = q(2)\cdot\cancel{(2-2)} + 5 = 5$ $p(-2) = -p(2) = -5$

x^2-4

$p(x) = s(x)(x^2-4) + ax+b$

$p(2) = s(2)(2^2-4) + 2a+b = 2a+b = 5$
$p(-2) = s(-2)((-2)^2-4) - 2a+b = -2a+b = -5$ $\begin{cases} 2a+b=5 \\ -2a+b=-5 \end{cases}$

$a = \frac{5}{2}$ $b=0$. $r(x) = \frac{5}{2}x$.

Es. 5 $a_1 = 1$, $a_2 = ka_1+1$, $a_{n+1} = k(a_1+\dots+a_n)+1$ $\forall n>1$

Minimo k tale che $3^{4031}\cdot 7^{4027} \mid a_{2016}$.

$a_2 = k+1$
$a_3 = k(a_2+a_1)+1 = k(k+1+1)+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2$
$a_4 = \dots = (k+1)^3$

$a_n = (k+1)^{n-1}$. Come lo dimostro?

PRINCIPIO di INDUZIONE

Se P è una proprietà dei numeri naturali, $P(n)$, tale che:
- $P(0)$ è vera (o $P(1)$ è vera)
- Se so che $P(n)$ è vera, allora riesco a dimostrare che $P(n+1)$ è vera.

Allora $P(n)$ è vera per ogni numero naturale n.

$P(n)$: $a_n = (k+1)^{n-1}$.

- $P(1)$: $a_1 = (k+1)^{1-1}$ è vera? Sì.

- Vale $P(n)$: so che $a_n = (k+1)^{n-1}$. Dimostriamo $P(n+1)$.
Cioè dimostriamo che $a_{n+1} = (k+1)^n$.

$$a_{n+1} \overset{\text{def}}{=} k(a_1 + \dots + a_n) + 1 = ka_n + \underbrace{k(a_1 + \dots + a_{n-1}) + 1} =$$

$$= ka_n + a_n = a_n(k+1) \overset{\text{ipotesi}}{=} (k+1)^{n-1} \cdot (k+1) = (k+1)^n. \qquad \text{OK!}$$

Ora so che $a_n = (k+1)^{n-1}$.

$a_{2016} = (k+1)^{2015}$. $\qquad 3^{4031} \cdot 7^{4027} \mid (k+1)^{2015}$

$k+1 = 3^a \cdot 7^b$
$(k+1)^{2015} = 3^{2015a} \cdot 7^{2015b}$

Devo avere $4031 \leq 2015a \rightarrow a \geq 3$
$4027 \leq 2015b \rightarrow b \geq 2$

Quindi $k+1$ è almeno $3^3 \cdot 7^2 = 1323 \Rightarrow k = 1322$ è il minimo che va bene.