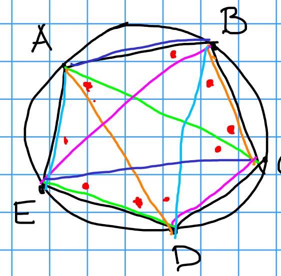
GEOMETRIA

Pordenone, 3 febbraio

angela.veronese@sns.it

Esercizio 1 Un pentagono inscritto in una circonferenza è tale che ogni lato è parallelo ad una diagonale.
Dimostrare che il pentagono è regolare.



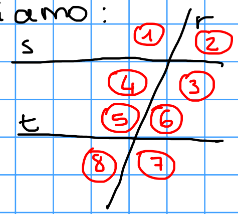
$AC \parallel DE$
$DC \parallel EB$ ...

Dimostriamo che tutti gli angoli sono congruenti.

$E\hat{A}B$ $\quad D\hat{A}C \cong A\hat{D}E \cong A\hat{C}B$ (rette $\parallel$ tagliate da trasversale)
$D\hat{A}C \cong D\hat{E}C \cong D\hat{B}C$ (angoli alla circonferenza)
$\rightarrow$ Troviamo che ogni angolo del pentagono è uguale a 3.

Ricordiamo:

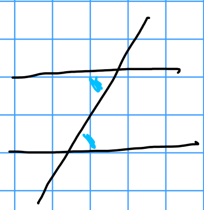
1)



s, t rette $\parallel$, r trasversale

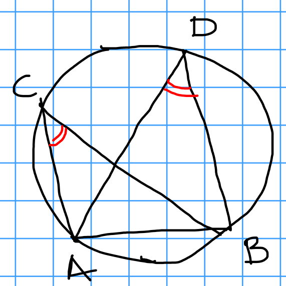
Vale che: $1 = 3 = 5 = 7$
$1, 3$ sono OPPOSTI AL VERTICE
$2 = 4 = 6 = 8$

$1 + 2 = 180°$ ...



SONO ALTERNI INTERNI

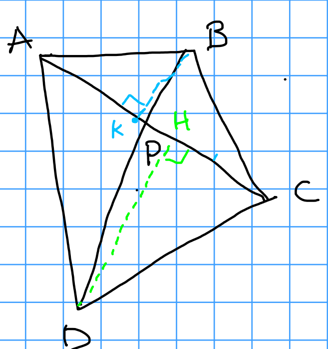
2)



ANGOLI alla CIRCONFERENZA
(sottesi dalla corda AB)

$A\hat{C}B \cong A\hat{D}B$

Esercizio 2: Un quadrilatero ABCD è tale che le 2 diagonali lo dividono in 4 triangoli equivalenti (= hanno la stessa area).
Allora ABCD è un parallelogramma.



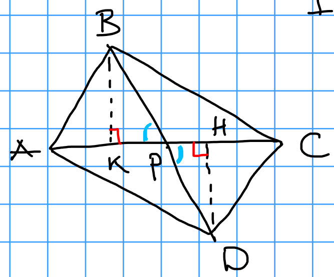
Area (ABP) = Area (BPC) = Area (CPD) =
= Area (APD)

$$\text{Area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2}$$

Consideriamo $\overset{\triangle}{ADC}$ e $\overset{\triangle}{ACB}$: hanno la stessa area.

$$\text{Area}(\overset{\triangle}{ADC}) = \frac{AC \cdot DH}{2}$$
$$\text{Area}(\overset{\triangle}{ACB}) = \frac{AC \cdot BK}{2}$$

$$\frac{AC \cdot DH}{2} = \frac{AC \cdot BK}{2}$$
$$\Rightarrow DH = BK$$



I triangoli $B\hat{K}P$ e $P\hat{H}D$ hanno:

- $B\hat{K}P = P\hat{H}D = 90^\circ$
- $BK = HD$
- $B\hat{P}K = D\hat{P}H$ perché opposti al vertice

$\Rightarrow$ $\overset{\triangle}{BKP}$ e $\overset{\triangle}{PDH}$ sono congruenti

Allora $BP = PD$.

Ripeto per $\overset{\triangle}{ABD}$ e $\overset{\triangle}{BDC}$: trovo che $AP = PC$.

Un quadrilatero con le diagonali che si bisecano è un parallelogramma.

Consideriamo $\overset{\triangle}{ABP}$ e $\overset{\triangle}{PCD}$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ BP = PD \\ \bullet\ AP = PC \\ \bullet\ B\hat{P}A \cong D\hat{P}C \end{array}\right\} \quad \triangle ABP \cong \overset{\triangle}{PCD} \Rightarrow AB = CD$$

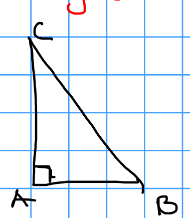
Ripeto per $\overset{\triangle}{APD}$ e $\overset{\triangle}{BPC}$: trovo che $AD = BC$.

$\Rightarrow$ ABCD è parallelogramma.

— o — o —

TRIANGOLI

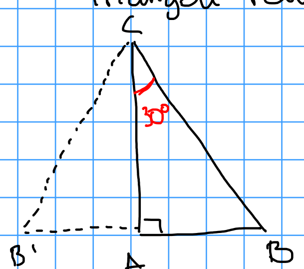
Triangoli rettangoli



$C\hat{A}B = 90^\circ$.

Teorema di Pitagora: $CB^2 = AB^2 + AC^2$.

- Triangoli rettangoli "speciali".



$A\hat{C}B = 30^\circ$, $C\hat{B}A = 60^\circ$

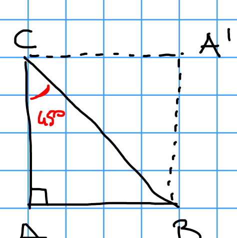
$BC = \ell$

$\overset{\triangle}{CBB'}$ è equilatero. $\overset{\triangle}{CAB'} \cong \overset{\triangle}{CAB}$

$BB' = CB' = CB = \ell$

$AB = AB' = \ell/2$

$AC^2 = -AB^2 + BC^2 = -\frac{\ell^2}{4} + \ell^2 = \frac{3}{4}\ell^2$ $\qquad AC = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$.



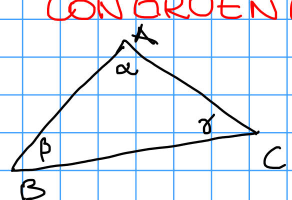
$AB = AC = \ell$ $\qquad BC = ?$

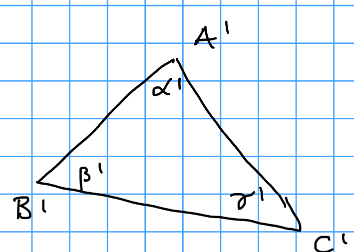
$A\hat{C}B = A\hat{B}C = 45^\circ$

$ABA'C$ è un quadrato

$CB^2 = AB^2 + AC^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2$ $\qquad CB = \sqrt{2}\ell$.

TRIANGOLI CONGRUENTI





Sono congruenti se:

$AB = A'B'$	$\alpha = \alpha'$
$AC = A'C'$	$\beta = \beta'$
$BC = B'C'$	$\gamma = \gamma'$

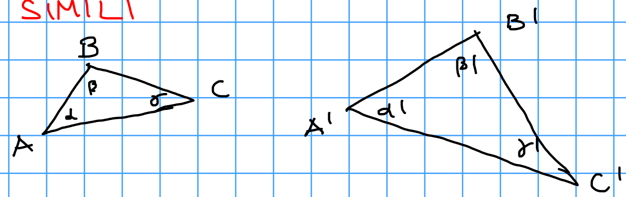
Criteri di congruenza: due triangoli sono congruenti se

1) 2 lati sono congruenti e gli angoli compresi tra essi sono congruenti.

2) 1 lato congruente e 2 angoli congruenti

3) 3 lati congruenti

TRIANGOLI SIMILI



Sono simili se:

$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$ costante di proporzionalità

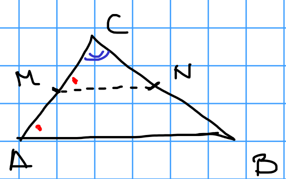
Criteri di similitudine: 2 triangoli sono simili se:

1) Hanno tutti gli angoli congruenti (ne bastano 2)

2) Hanno 2 lati in proporzione e l'angolo compreso congruente

3) Hanno i 3 lati in proporzione.

Esempio:



M, N punti medi di AC e di BC.

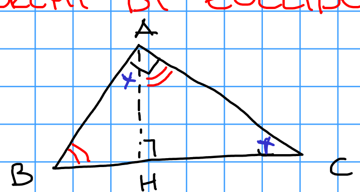
I triangoli $\overset{\triangle}{CMN}$ e $\overset{\triangle}{ABC}$ sono simili: perché?

- $M\hat{C}N \cong A\hat{C}B$ perché in comune
- $\frac{CM}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{CN}{CB}$

$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$. $2MN = AB$.

$\Rightarrow C\hat{M}N \cong C\hat{A}B$. Ci dice che $MN \parallel AB$.

TEOREMI DI EUCLIDE



- $\overset{\triangle}{ABH}$ e $\overset{\triangle}{ABC}$:
  - $B\hat{A}C \cong A\hat{H}C = 90°$
  - $A\hat{B}H = A\hat{B}C$ in comune

$\Rightarrow$ Sono simili.

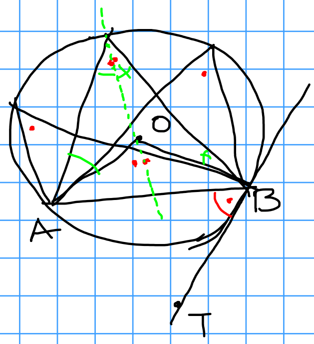
$$\underbrace{\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}} = \frac{AH}{AC} \qquad AB^2 = BH \cdot BC$$

- Analogamente: $AC^2 = CH \cdot BC$.

- $\overset{\triangle}{ABH}$ e $\overset{\triangle}{AHC}$: sono simili
  - $A\hat{H}B = A\hat{H}C = 90°$
  - $B\hat{A}H = A\hat{C}H$

Trovo: $\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC$

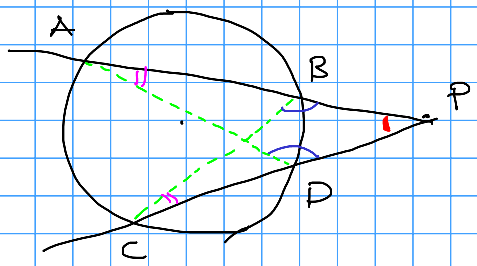
CIRCONFERENZE



$A\hat{O}B$ è ANGOLO al CENTRO

Gli angoli alla circonferenza sono tutti congruenti e uguali a $\frac{A\hat{O}B}{2}$
(e uguali a $A\hat{B}T$)

TB tangente

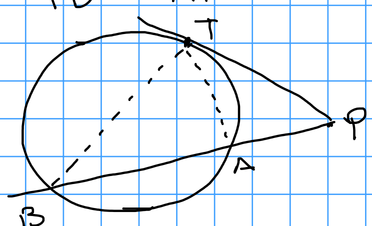


2 rette secanti

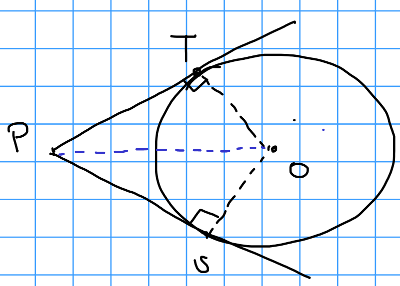
$\overset{\triangle}{PDA}$ e $\overset{\triangle}{PBC}$ sono simili. Perché?

- $B\hat{P}C \cong A\hat{P}D$ (in comune)
- $B\hat{A}D \cong B\hat{C}D$ (angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BD)

Quindi: $\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} \Rightarrow \boxed{PB \cdot PA = PC \cdot PD}$



Esercizio: $PT^2 = PA \cdot PB$



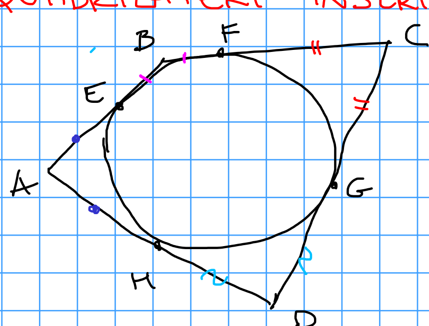
$PT \perp TO$, $PS \perp OS$

$\overset{\triangle}{PTO}$ e $\overset{\triangle}{POS}$ sono congruenti:

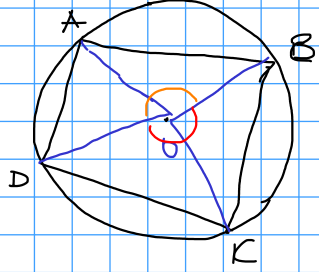
- $TO = OS$ perché raggi
- OP è in comune
- sono rettangoli

$\Rightarrow PT = PS$

QUADRILATERI INSCRIVIBILI e CIRCOSCRIVIBILI



ABCD è circoscritto a una circonferenza se e solamente se:
$AD + BC = AB + CD$



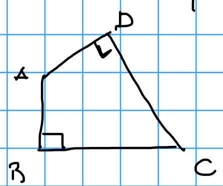
ABCD è inscrivibile in una circonferenza

$$\left.\begin{aligned} \widehat{DAB} &= \frac{\frown}{2} \\ \widehat{DCB} &= \frac{\frown}{2} \end{aligned}\right\} \quad \widehat{DAB} + \widehat{DCB} = \frac{360°}{2} = 180°$$

$$\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180°$$

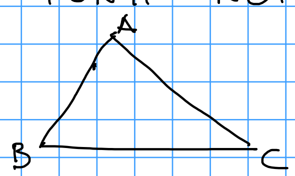
Se ABCD è inscrivibile, la somma degli angoli opposti è 180°.
Vale anche il viceversa: se ABCD è tale che la somma degli angoli opposti è 180°, allora esiste una circonferenza che passa per A, B, C, D.

CASO TIPICO:

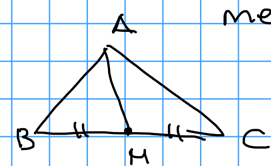


è inscrivibile

* PUNTI NOTEVOLI di UN TRIANGOLO



- BARICENTRO : punto di incontro delle mediane



- ORTOCENTRO : punto d'incontro delle altezze
- INCENTRO : punto d'incontro delle bisettrici (centro della circonferenza inscritta)
- CIRCOCENTRO : punto d'incontro degli assi dei lati (centro della circonferenza circoscritta).