COMBINATORIA - ESERCIZI

Esercizio 1:

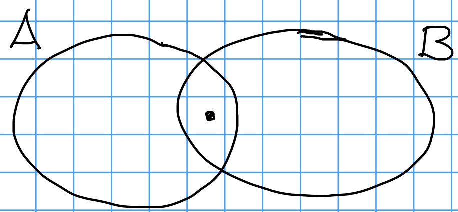
(A, B) $\quad A \subseteq \{1, \dots, 5\}, \quad B \subseteq \{1, \dots, 5\}, \quad |A \cap B| = 1$

[Es: n° totale di sottoinsiemi: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$\underset{\uparrow 2^5 \;\; \nwarrow 2^5}{(A, B)}$ $\quad 2^5 \cdot 2^5 = 2^{10}$ possibilità per la coppia.]

$A = \{1, 2\} \qquad B = \{2, 3, 4\}$

$A = \{1\} \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \dots$



Ho 5 modi per scegliere l'unico elemento dell'intersezione.

Mi restano 4 elementi da piazzare.
Possono stare:
- in A ma non in B
- in B ma non in A
- né in A né in B

Ho 3 possibilità di scegliere dove mettere ~~gli~~ ciascuno degli altri 4 elementi.

In tutto ho: $5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot 3^4 = 405$ coppie possibili.

Esercizio 2

$$\text{Probabilità} = \frac{\text{n° CASI FAVOREVOLI}}{\text{n° CASI TOTALI}}$$

n° CASI TOTALI = ?

(1) $\qquad$ (2) $\qquad$ Partita $\leftrightarrow$ 1121122222
sequenze di 10 cifre uguali a 1 o a 2

Partite totali $= 2^{10}$

n° CASI FAVOREVOLI: partite che finiscono 5 - 5
$\updownarrow$
sequenze di 10 cifre formate da 5 cifre 1 e 5 cifre 2.

Per es: 1111122222. Il loro numero è il numero di anagrammi di 1111122222.

$\rightarrow$ Sono $\dfrac{10!}{5!\,5!} = \dbinom{10}{5}$

$$\text{Probabilità} = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} = \frac{63}{256}.$$

Esercizio 3

Devo formare 10 coppie da un insieme di 20 persone.

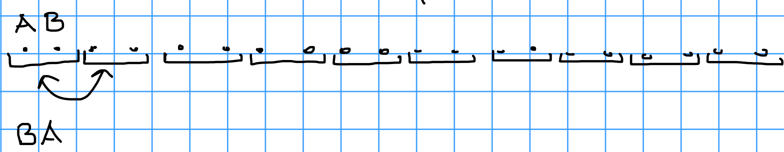
1° MODO: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{scelgo la 1ª coppia}}}{\binom{20}{2}} \cdot \binom{18}{2} \cdot \binom{16}{2} \cdot \dots \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \dfrac{1}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero di volte che sto contando lo stesso insieme di coppie}}}{10!}}$

(non conta l'ordine in cui le ho scelte)

2° MODO: Ordino le 20 persone: $20! \cdot \dfrac{1}{10! \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}$

non conta l'ordine delle coppie

modi di ordinare ciascuna coppia

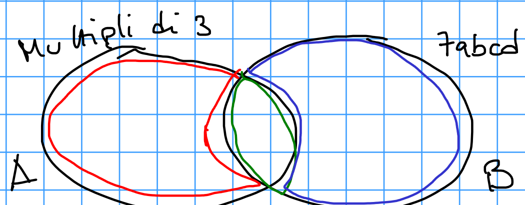


Esce: $\dfrac{20!}{10! \cdot 2^{10}}$.

Esercizio 4.

Quanti sono i numeri da 0 a 99999 che sono multipli di 3 o hanno 7 come cifra delle decine di migliaia (!).

- Multipli di 3 tra 0 e 99999: sono 33334.
- Numeri della forma 7abcd: $10^4 = 10000$ (ho 10 possibilità per ogni cifra restante)



$|A| + |B| = \bullet + \bullet + \bullet + \bullet$

Voglio: $\bullet + \bullet + \bullet = |A| + |B| - |A \cap B|$

- Multipli di 3 della forma 7abcd: da 70002 a 79998
  sono 3333

perché?

$70002 = 3 \cdot 23334$
$79998 = 3 \cdot 26666$

$$\begin{array}{r} 26666 \\ 23334 \\ \hline 3332 \end{array} + 1 = 3333$$

N° massimo di tentativi:

$33334 + 10000 - 3333 =$

$= \boxed{40001}$

Esercizio 5

1) Federica vince se e solo se n è multiplo di 3.
Devo dimostrare:
a • Se n è multiplo di 3, Federica può vincere
b • Se n non è multiplo di 3, Federica non ha una strategia vincente.

a) $n = 3k$, Federica toglie 3 graffette alla volta e dopo k mosse sono finite.

b) Devo dire che Federica non arriva mai ad avere 0 graffette.
0 è multiplo di 3.
Se dimostro che partendo da un numero non multiplo di 3 e

facendo una qualsiasi mossa trovo ancora un numero non multiplo di 3, allora non potrò mai arrivare ad avere 0 graffette (e quindi non posso vincere).

n non multiplo di 3

$$n \begin{cases} \nearrow n-3 \text{ non è multiplo di } 3 \\ \searrow \frac{n}{2} \text{ non è multiplo di } 3 \end{cases} \Bigg\} \text{ ok.}$$

2) Federica vince se e solamente se n <u>non</u> è multiplo di 3.

Devo dimostrare:
a• Se n non è multiplo di 3, allora Federica può vincere
b• Se $3 \mid n$, Federica non può mai vincere.

a) $n = 3k+1, \ 3k+2$

Se $n = 3k+1$, Federica continua a togliere 3 graffette e dopo k mosse ne rimane solo 1. Ok!

Se $n = 3k+2$, Federica toglie 3 graffette fin che non ne restano solo 2 e poi può dividere per 2. Ok!

b) $$n = 3k \begin{cases} \nearrow 3k-3 \text{ è multiplo di } 3 \\ \searrow \frac{3k}{2} \text{ è multiplo di } 3 \end{cases}$$

Dopo ogni mossa il n° di graffette è sempre multiplo di 3. In particolare non potrò mai restare con una sola graffetta.
$\rightarrow$ Federica non vince