COMBINATORIA

Conteggi, probabilità, giochi, ...

* Giulia ha 5 camicie, 3 paia di jeans e 4 paia di scarpe.
- In quanti modi diversi può vestirsi?

$$60 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n° di scelte per} \\ \text{la camicia}}}{5} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{jeans}}}{3} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{scarpe}}}{4}$$

- 2 camicie, 1 paio di jeans e 2 paia di scarpe sono di colore blu.
In quanti modi può vestirsi se vuole indossare esattamente una cosa blu?
  - Scelgo solo la camicia blu: $2 \cdot (3-1) \cdot (4-2) = 8$ modi
  - jeans blu: $(5-2) \cdot 1 \cdot 2 = 6$ modi
  - scarpe blu: $(5-2) \cdot (3-1) \cdot 2 = 12$ modi

In tutto
$8 + 6 + 12 = 26$ modi

Se invece vuole indossare <u>almeno</u> una cosa blu?

Idea: conto i modi che non vanno bene (cioè i modi di vestirsi senza cose blu) e li sottraggo dal totale.

NON VANNO BENE: $(5-2) \cdot (3-1) \cdot (4-2) = 12$ modi

Quindi: $60 - 12 = 48$ modi

* Esercizio: provare a contarli direttamente per casi.

* Ho una squadra di calcio (11 persone) e devo scegliere un capitano e un portiere, che devono essere persone diverse.
In quanti modi lo posso fare?

$$110 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{scelgo il} \\ \text{capitano}}}{11} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modi di scegliere il} \\ \text{portiere tra le persone restanti}}}{10}$$

E se non chiedo che siano persone diverse?

$$121 = 11 \cdot 11 = \underbrace{10 \cdot 11}_{\text{se persone diverse}} + \underbrace{11}_{\text{stessa persona}}$$

* Quanti sono i numeri di 5 cifre con tutte le cifre diverse?
(> 9999)

$$\underbrace{9}_{\substack{\text{modi per} \\ \text{scegliere la 1ª} \\ \text{cifra} \\ (\neq 0)}} \cdot \underbrace{9}_{\substack{\text{scelta} \\ \text{2ª cifra} \\ \neq \text{dalla} \\ \text{1ª}}} \cdot \underbrace{8}_{\text{3ª cifra}} \cdot 7 \cdot 6 = \ldots$$

* 6 persone si vogliono sedere in prima fila (6 posti).
In quanti modi possono disporsi?

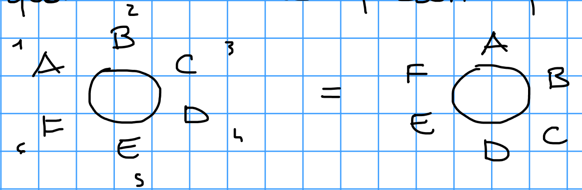
$$\underset{\uparrow}{6} \cdot \underset{\uparrow}{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 = 6!$$

FATTORIALE

scelta 1° posto | scelta 2° posto

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

* 6 persone si vogliono sedere attorno a un tavolo rotondo. In quanti modi lo possono fare?



$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 5! = 120$$

ogni disposizione è contata esattamente 6 volte

* 6 persone che si vogliono sedere in prima fila (6 posti). Alberto e Beatrice vogliono sedersi vicini. (A e B)
In quanti modi possono sedersi?

$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

AB BA

- 5 modi per scegliere quali posti occupano A e B.
- 2 modi per decidere in che ordine li metto
- $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ modi per disporre gli altri nei 4 posti liberi

In tutto: $5 \cdot 2 \cdot 4! = 240$.

* n punti in fila, 3 colori a disposizione. Voglio colorare i punti in modo che 2 punti vicini siano sempre di colori diversi. Quanti modi?

$3 \cdot 2^{n-1}$.

3 modi per scegliere il colore del primo
2 modi per il 2°
2 modi per il 3°
⋮
2 modi per l'ultimo.

* ANAGRAMMI.

N° di anagrammi della parola:

- SCUOLA : $6! = 720$
- SCIENZE : $\frac{7!}{2}$ — $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ↓ Stiamo contando ogni parola 2 volte: devo dividere per 2!
- OLIMPIADI : $\frac{9!}{3!}$ — In 9! sto contando ogni parola più volte. Quante volte? $6 = 3!$
- MATEMATICA : $\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$

M → 2!, T → 2!, A → 3!

- MAMMA: $\dfrac{5!}{2!\,3!} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$

COEFFICIENTI BINOMIALI

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

* $\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme di n elementi.

$\{1, 2, 3, \dots, n\}$

Per ogni numero, lo coloro di nero se appartiene a un sottoinsieme, e di bianco altrimenti

NBNNB ... B. $\quad$ k N, $(n-k)$ B

Bigezione tra:

sottoinsiemi di cardinalità k $\longleftrightarrow$ anagrammi di $\underbrace{NN\dots N}_{k}\ \underbrace{B\dots B}_{n-k}$

$\rightarrow$ Sono: $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

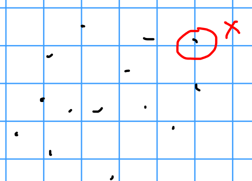
PROPRIETÀ:

$\binom{0}{0} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\quad$ Scegliere un sottoinsieme di k elementi è come scegliere il complementare, di $n-k$ elementi.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$\binom{n+1}{k+1}$ = n° sottoinsiemi di k elementi in $\{1, \dots, n+1\}$

Contiamoli in un altro modo:



sottoinsiemi di $k+1$ elementi = sottoinsiemi che contengono x + non contengono x

devo scegliere k elementi fra n: $\binom{n}{k}$

devo scegliere $k+1$ elementi fra n: $\binom{n}{k+1}$

In tutto: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Esercizio: $(x+1)^n$. Qual è il coefficiente di x^k? $\left(R: \binom{n}{k}\right)$

* 48 studenti. Devo scegliere 2 squadre da 7 persone. In quanti modi?

$$\underbrace{\binom{48}{7}}_{\text{scelgo 7 persone}} \cdot \underbrace{\binom{41}{7}}_{\text{scelgo altre 7 persone}} \boxed{\cdot \frac{1}{2}}$$

$\{A, B, C, D, E, F, G\}$ $\{A', B', C', D', E', F', G'\}$

* $\{1, \dots, 2017\}$. In quanti modi posso scegliere a, b, c, d, e tali che $1 \leq a < b < c < d < e \leq 2017$?

Risposta: $\binom{2017}{5}$ perché una volta scelti 5 numeri distinti ho solo un modo per ordinarli.

* E se chiedo $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 2017$? .... $\left[R: \binom{2021}{5}\right]$

— o — o —

ALGEBRA ES. 6.

$a_1, a_2, \dots$ interi positivi $a_2 \neq 2$

a_{n+1} = n° divisori positivi di a_n

Dimostrare che esiste m tale che a_m è un quadrato.

Numero di divisori

$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ Quanti sono i suoi divisori positivi?

$b \mid a$ $b = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$ $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

Posso scegliere i β_i in quanti modi? Per β_1 ho $\alpha_1 + 1$ possibilità

β_2 $\alpha_2 + 1$

$\vdots$

β_k $\alpha_k + 1$

In tutto ho: $(\alpha_1+1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k+1)$ possibilità di scegliere gli esponenti.

n° di divisori di a = $(\alpha_1+1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k+1)$

* Quando a ha un numero dispari di divisori?

$\iff (\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$ è dispari $\iff$ ogni (α_i+1) è dispari

$\Updownarrow$

$a = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, α_i pari $\iff$ ogni α_i è pari

$\Updownarrow$

a è un quadrato

Facciamo prima i casi:

- $a_1 = 1$, sono a posto
- $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, NO
- $a_1 > 2$. $a_{n+1} \leq a_n$ Se $a_n \neq 2$, vale $a_{n+1} < a_n$

  (perché $(m, m-1) = 1$)

Prima o poi avremo $a_k = 2$. $(k > 2)$ Prendiamo il minimo tale k.

a_{k-1} ha 2 divisori $\Rightarrow a_{k-1}$ è primo.

$a_{k-1} \neq 2$. a_{k-1} è dispari $(k-1 > 1)$

a_{k-2} ha un n° dispari di divisori $\Rightarrow a_{k-2}$ è un quadrato.

(va bene perché $k-2 \geq 1$)