Geometria

Pordenone, 9 febbraio 2018

Problema 1. Sui lati di un triangolo ABC rettangolo in A vengono scelti tre punti D, E ed F rispettivamente su BC, AC e AB in modo che il quadrilatero $AFDE$ sia un quadrato. Se x è la lunghezza di un suo lato, dimostrare che

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

Problema 2. Sia dato un triangolo ABC. Si indichino con M ed N i punti medi rispettivamente dei lati AC e BC. Siano inoltre S e T rispettivamente punti sui lati AC e BC tali che:

$$AS = \frac{1}{3}AC \qquad\qquad BT = \frac{1}{3}BC.$$

Dimostrare che le bisettrici degli angoli $A\hat{S}T$ e $B\hat{T}S$ si incontrano su un punto P del lato AB se e solo se il quadrilatero $AMNB$ è circoscrivibile ad una circonferenza.

Problema 3. Sia $ABCD$ un rombo, ed E un punto qualunque sulla sua diagonale AC. Sia F il punto sul segmento BC tale che $BF = DE$. Provare che:

$$(AB + BF) \cdot FC = AE \cdot EC.$$

Problema 4. Sia data una circonferenza di diametro AB e centro O. Sia C un punto sulla circonferenza (diverso da A e B), e si tracci la retta r parallela ad AC passante per O. Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB.

1. Dimostrare che DO è bisettrice di $C\hat{D}B$.

2. Dimostrare che il triangolo CDB è simile al triangolo AOD.

Problema 5. Sia ABC un triangolo con baricentro G. Sia $D \neq A$ un punto sulla retta AG tale che $AG = GD$, e sia $E \neq B$ un punto sulla retta GB tale che $GB = GE$. Sia infine M il punto medio di AB. Dimostrare che il quadrilatero $BMCD$ è inscrittibile in una circonferenza se e solo se $BA = BE$.