COMBINATORIA & altro

Fabio

Conteggi

Esempio: un professore ha a disposizione 10 ragazzi di 5ª, 7 di 4ª, 7 di 3ª, 3 di 2ª e 2 di 1ª. (A_1 A_2)

Squadra con 5 persone di classi diverse.

In quanti modi può farla? $10 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2$

$K \begin{cases} A_1 \\ A_2 \end{cases} \rightsquigarrow 2 \cdot K$

$J \begin{cases} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{cases} \rightsquigarrow K = 3J \qquad \rightsquigarrow 2 \cdot 3 \cdot J$

[Quanti modi ha di fare una squadra con 3 di 5ª, 2 di 4ª, 3 di 3ª, 2 di 2ª e 1 di prima?]

1° passo: Scegliere i 3 di 5ª

ANAGRAMMI

STUDIO $\quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 6$ fattoriale

n fattoriale: $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

ATTENZIONE: $0! = 1$

CA_1SA_2
CA_2SA_1 $\quad \dfrac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$

$OLI_1MPI_2ADI_3 \quad \dfrac{9!}{3!}$

TITTI $\quad \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 10 = \binom{5}{3}$

"5 su 3"

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

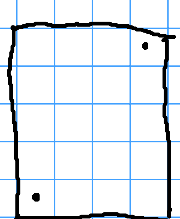
$$\frac{2!}{1!\,1!}$$

$\binom{n}{k}$ è il # di modi di prendere k elementi da un insieme di n elementi.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
S S S N N N N N N N $\quad (1,2,3)$
N N S S N N N N S N $\rightsquigarrow (3,4,9)$

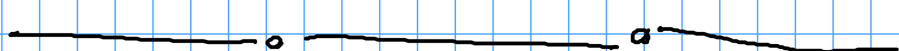
Passo 1. $\binom{10}{3} = \dfrac{10\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}^{4}\cdot \cancel{7!}}{\cancel{3!}\cdot \cancel{7!}} = 120$

Passo 2. $\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}$.



$\to\ \to\ \to\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$
D D D S S S S

$$\binom{7}{3}$$



Principio di induzione

n naturali

x Vale per $n=1$

[Supponiamo che valga per $n=m$

Se riusciamo a dimostrare che vale per $n=m+1$ abbiamo finito.

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \; \ldots\ldots$

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad \sum_{i=1}^{n} i$$

Passo base: $1 \quad \frac{1\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}=1 \Rightarrow$ Vale per $n=1$

Ipotesi induttiva: Supponiamo che sia vera per $n=m$

$$1+2+3+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}.$$

Passo induttivo: $1+2+3+\ldots+m+(m+1)=\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)=$

$$=\frac{m(m+1)+2(m+1)}{2}=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$\square$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Passo base: $1^2 \quad \frac{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{6}} \quad \checkmark$

Ipotesi induttiva: Supponiamo $1^2+2^2+\ldots+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

Passo induttivo: $1^2+2^2+\ldots+(m+1)^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2=$

$$=\frac{(m+1)}{6}\left[m(2m+1)+6(m+1)\right]=\frac{(m+1)}{6}\left(2m^2+7m+6\right)=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$\frac{(m+1)\left((m+1)+1\right)\left(2(m+1)+1\right)}{6}$$

$\square$

Es: $\{1, 2, \dots, 2020\}$. Sia A un suo sottoinsieme.

P_A il prodotto dei reciproci di A

$A = \{1, 4, 2003\}$ $\quad P_A = \frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 2003}$

Quanto vale la somma di tutti i P_A? 2020

$\{1\}$ $\quad \{1, 2\}$ $\quad \{1, 2, 3\}$

$\{1\}$ $\{2\}$ $\{1,2\}$ $\quad \{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$ $\{1,2,3\}$

1 $\quad$ 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

1 $\quad 2$ $\quad 3$

Supponiamo sia vero per m.

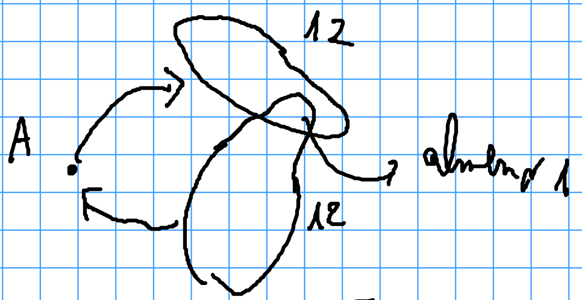
$$\{\underbrace{1, 2, 3, \dots, m}, \underbrace{m+1}\}$$

$$m + \frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1} = \boxed{m+1}$$

PRINCIPIO DEI CASSETTI (PIGEONHOLE)

K cassetti e $K+1$ calzini. Allora un cassetto contiene almeno 2 calzini.

Es: 24 ragazzi ad uno stage. Ognuno scrive un bigliettino ad altri 12. Dimostrare che ci sono 2 ragazzi che si scambiano il biglietto.



Es: in un gruppo di n persone, dimostrare che ce ne sono 2 con lo stesso numero di conoscenze.

c_i = # di persone con i conoscenze

$C_0 \; C_{n-1}$

C_1 $\qquad$ n − 1 cassetti ed n persone.

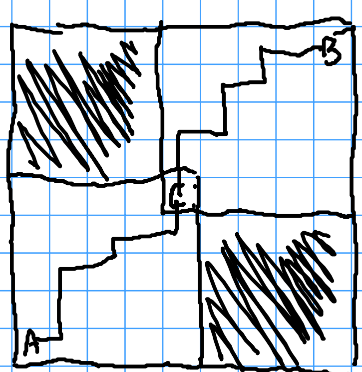
C_2

$\vdots$

C_{n-2}

1. FRIULANO $\quad 8!$

   MATEMATICA $\quad \dfrac{10!}{2!\,3!\,2!}$

2. 

DDDDDDDD SSSSSSSS

$$\binom{16}{8} - \binom{8}{4}^2 = 7970$$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3$

$n=1: \quad 1^3 \quad \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2 = 1$

$1^3+2^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

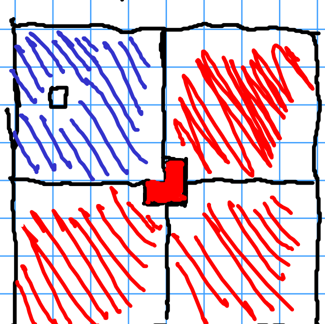
$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\Big[\underbrace{n^2+4(n+1)}_{n^2+4n+4}\Big] =$$

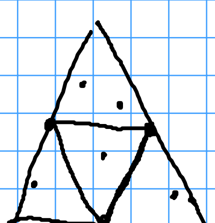
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

4. $n=0$  $\leftarrow$

$n=1$ 

Per $2^n \times 2^n$ qualunque casella togliamo riusciamo a ricoprirla.



5. 

6. $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, ne prendo $n+1$

- $\boxed{1\ 2}\boxed{3\ 4}\ \boxed{5\ 6} \dots \boxed{2n-1\ \ 2n}$ $\rightsquigarrow$ ho 2 numeri consecutivi

a divide b
a divide $b+1$

a divide $(\cancel{b}+1-\cancel{b}) = 1$

- $\underbrace{2^{\alpha} d_1}$ $\quad 2^{\alpha} d_2$

Al più n cassetti

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$2^{\alpha_1} d_1 \quad 2^{\alpha_2} d_1$.

$\square$