Teoria base

- Un piano è individuato da tre punti non allineati
- Due punti individuano una retta
- Due rette che si intersecano sono complanari
- Tre rette ciascuna delle quali taglia le altre appartengono allo stesso piano.
- Se tre rette non complanari si intersecano, a due a due, allora si intersecano nello stesso punto.
- Se due piani si intersecano, la loro sezione è una retta.
- Se una retta è perpendicolare a due rette, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare al piano delle due rette.

Teorema 1. *Se dal piede P di una retta r perpendicolare al piano α si conduce la perpendicolare PA ad una retta $s \in \alpha$ allora la retta s è perpendicolare al piano delle rette r e PA.*

- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.
- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

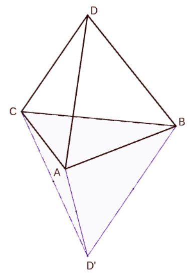
Definizione 1. Si definisce diedro l'intersezione di due semispazi, la retta intersezione è detta costola.

Definizione 2. L'angolo piano sezione di un diedro con un piano perpendicolare alla costala si definisce angolo diedro.

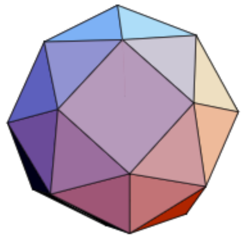
Attrezzi

- $\sum \alpha_i = 2\pi\,(S-F)$
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$
- $F+V-S=2$
- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ dove $q=\frac{2S}{V}$ e $p=\frac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V-4$ e $V \leq 2F-4$

7 Esercizi



Problema 7.1. Dato il poliedro non regolare in figura, calcola l'angolo diedro individuato dalle facce ACD e CAD'



Problema 7.2. Dato il poliedro uniforme $(3, 3, 3, 3, 4)$ calcola F, quante sono triangoli T e quante quadrati Q, V ed S.

Problema 7.3. Costruisci un tetraedro in cui le quattro facce sono tutte triangoli rettangoli (definito quadriretto).

Dimostra che se una faccia ha i cateti di lunghezza 3 cm e 4 cm, è possibile costruire infiniti quadriretti di altezza compresa fra 1 cm e 5 cm.

Problema 7.4. Ricava il volume del più grande tetraedro regolare contenuto in dato cubo di spigolo ℓ.

Problema 7.5. Sia $\mathcal{T} = ABCD$ un tetraedro regolare, detti O_A, O_B, O_C ed O_D i baricentri delle quattro facce, i segmenti AO_A, BO_B, CO_C e DO_D si incontrano in un punto G (baricentro del tetraedro). Ricava che $AG = 3GO_A$, $BG = 3GO_B$, $CG = 3GO_C$ e $DG = 3GO_D$.

Problema 7.6. Sia $\mathcal{T} = ABCD$ un tetraedro regolare, detti $CG = CF = AE = AH = x$, dove $E \in AB$, $F \in CB$, $G \in CD$ e $H \in AD$, determina x in modo che il quadrilatero $EFGH$ abbia area massima.

Problema 7.7. Sia $\mathcal{T} = ABCD$ una piramide di base il triangolo ABC rettangolo in A. E, F, G sono i punti medi rispettivamente di CB, CA e AB. $DF \perp CA$ e $DG \perp AB$. Dimostra che $DE \perp ABC$.

Problema 7.8. Sia $\mathcal{T} = ABCD$ un tetraedro in cui le facce ABC e CDA sono triangoli rettangoli (in B e D). Sia M punto medio di BD e N punto medio di AC. Sapendo che $AM = MC$ dimostra che MN è la minima distanza fra le due rette sghembe (non complanari) AC e BD.

Problema 7.9. Sia π il piano passante per il centro di un cubo $\mathcal{C}$ che interseca 6 dei 12 spigoli nei punti medi. Sia $\mathcal{E} = \mathcal{C} \cap \pi$. Costruisci l'esagono $\mathcal{E}'$ ottenuto congiungendo le intersezioni dei prolungamenti degli altri 6 spigoli con il piano π. Se l'area di $\mathcal{E}$ misura $Area_{\mathcal{E}} = 674\ cm^2$, quanto misura $Area_{\mathcal{E}'}$?

Problema 7.10. Nel paese "tuttotondo" dato che tutto è rotondo si ha che $\pi = 1$ ma la geometria che si utilizza è quella euclidea.

Un famoso architetto (Renzo Sfera) ha collocato all'interno di un grande tetraedro trasparente la sfera (in acciaio) inscritta e altre quattro sfere, sempre di acciaio, più piccole, tangenti alla sfera principale e alle tre facce che concorrono in ciascuno dei quattro vertici del tetraedro.

Se l'altezza del tetraedro è 48 quanto misura il volume totale delle sfere d'acciaio?

Problema 7.11. L'architetto Sfera, visto il successo ottenuto con la precedente costruzione decide di continuare ad aggiungere nuove sferette, sempre con le stesse modalità. Se ne aggiungesse un numero veramente grande a che valore sommerebbero i volumi delle sferette?