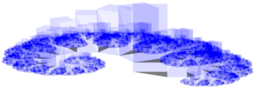
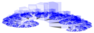
Geo-3D ...e ...non solo

Gianpaolo Gasparin http://www.joaogas.it

febbraio $7 \cdot 17^2$



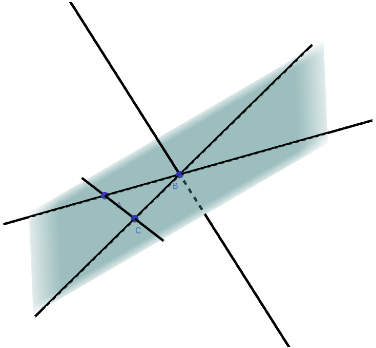


- Un piano è individuato da tre punti non allineati
- Due punti individuano una retta
- Due rette che si intersecano sono complanari
- Tre rette ciascuna delle quali taglia le altre appartengono allo stesso piano.

- Un piano è individuato da tre punti non allineati
- Due punti individuano una retta
- Due rette che si intersecano sono complanari
- Tre rette ciascuna delle quali taglia le altre appartengono allo stesso piano.

- Un piano è individuato da tre punti non allineati
- Due punti individuano una retta
- Due rette che si intersecano sono complanari
- Tre rette ciascuna delle quali taglia le altre appartengono allo stesso piano.

- Un piano è individuato da tre punti non allineati
- Due punti individuano una retta
- Due rette che si intersecano sono complanari
- Tre rette ciascuna delle quali taglia le altre appartengono allo stesso piano.

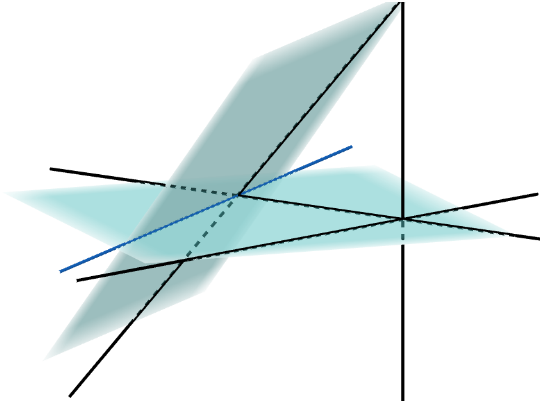


- Se tre rette non complanari si intersecano, a due a due, allora si intersecano nello stesso punto.
- Se due piani si intersecano, la loro sezione è una retta.
- Se una retta è perpendicolare a due rette, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare al piano delle due rette.

- Se tre rette non complanari si intersecano, a due a due, allora si intersecano nello stesso punto.
- Se due piani si intersecano, la loro sezione è una retta.
- Se una retta è perpendicolare a due rette, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare al piano delle due rette.

- Se tre rette non complanari si intersecano, a due a due, allora si intersecano nello stesso punto.
- Se due piani si intersecano, la loro sezione è una retta.
- Se una retta è perpendicolare a due rette, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare al piano delle due rette.

- Se tre rette non complanari si intersecano, a due a due, allora si intersecano nello stesso punto.
- Se due piani si intersecano, la loro sezione è una retta.
- Se una retta è perpendicolare a due rette, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare al piano delle due rette.

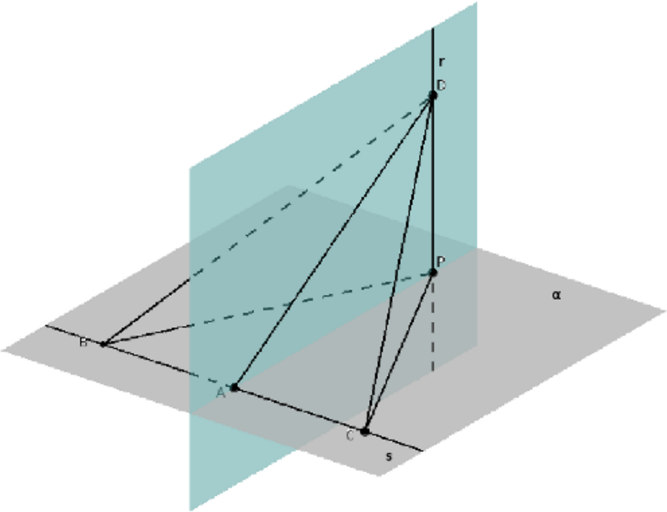


Teorema 1

Se dal piede P di una retta r perpendicolare al piano α si conduce la perpendicolare PA ad una retta $s \in \alpha$ allora la retta s è perpendicolare al piano delle rette r e PA.

Teorema 1

Se dal piede P di una retta r perpendicolare al piano α si conduce la perpendicolare PA ad una retta $s \in \alpha$ allora la retta s è perpendicolare al piano delle rette r e PA.



- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

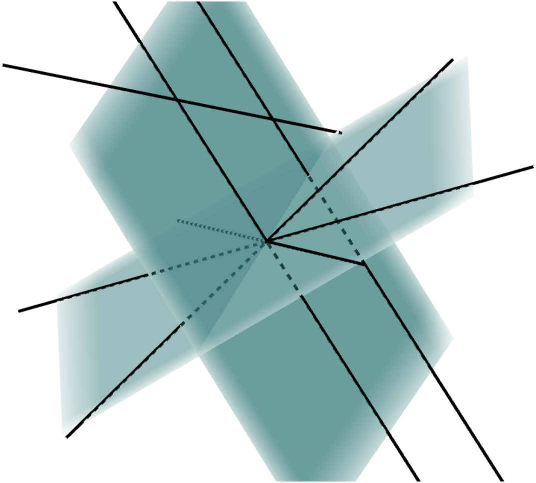
- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.



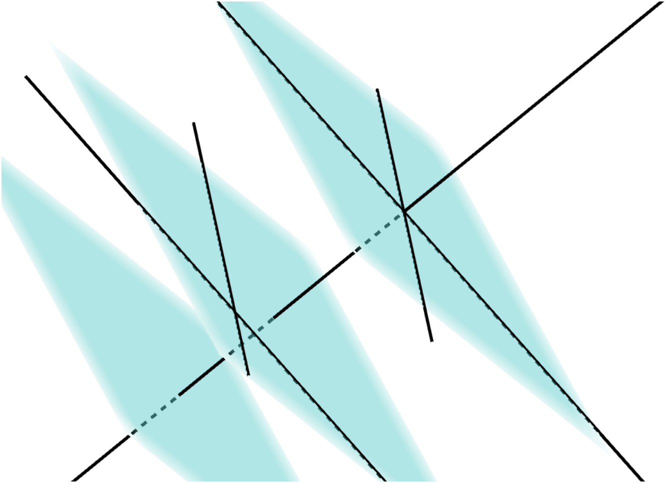
- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

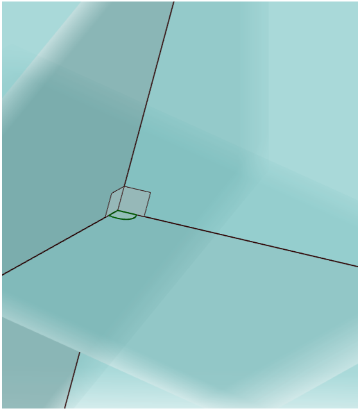


Definizione 1

Si definisce diedro l'intersezione di due semispazi, la retta intersezione è detta costola.

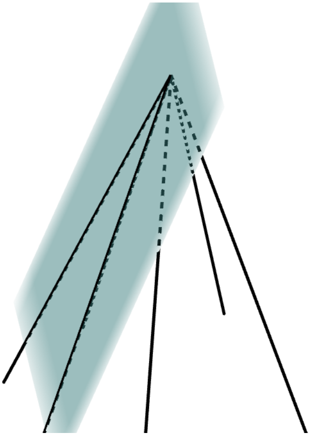
Definizione 2

L'angolo piano sezione di un diedro con un piano perpendicolare alla costala si definisce angolo diedro.



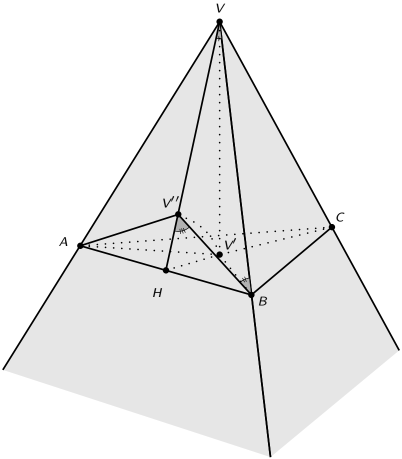
Definizione 3

Date in un certo ordine n semirette aventi origine comune, a tre a tre non complanari, e tale che il piano individuato da due semirette consecutive lasci tutte le altre da una stessa parte. L'intersezione degli n semispazi che hanno per origine quei piani e che contengono le $n - 2$ semirette restanti è detto **Angoloide**



Teorema 2

La somma delle facce che insistono su di un vertice è minore di 2π



Definizione 3

Un poliedro è una regione limitata dello spazio il cui bordo è costituito da poligoni aventi a due a due uno spigolo in comune. dim

Definizione 4

Poliedri regolari, sono quei poliedri che presentano la massima possibile simmetria. Sono i poliedri in cui sia i vertici, sia gli spigoli, sia le facce sono indistinguibili rispetto all'azione del gruppo di simmetria.

Osservazione 1

Ci possono essere solo **cinque poliedri regolari**.

3 triangoli equilateri

$3\alpha = 3\frac{\pi}{3} = \pi < 2\pi$

4 triangoli equilateri

$4\alpha = 4\frac{\pi}{3} < 2\pi$

5 triangoli equilateri

$5\alpha = 5\frac{\pi}{3} < 2\pi$

3 quadrati

$3\alpha = 3\frac{\pi}{2} < 2\pi$

3 pentagoni

$3\alpha = \frac{9\pi}{5} < 2\pi$

Definizione 4

Poliedri regolari, sono quei poliedri che presentano la massima possibile simmetria. Sono i poliedri in cui sia i vertici, sia gli spigoli, sia le facce sono indistinguibili rispetto all'azione del gruppo di simmetria.

Definizione 5

Un poliedro convesso $\mathcal{P}$ si dice regolare se:

1. tutte le facce sono poligoni regolari
2. tutte le facce sono uguali fra loro
   Detta q la valenza del poliedro, q è il numero delle facce che convergono in ogni vertice.
3. tutti i vertici hanno la stessa valenza q

(1)tutte le facce sono poligoni regolari (3) tutti i vertici hanno la stessa valenza q

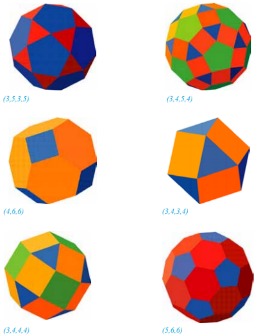


Figura: Esempi di poliedri uniformi

(1)tutte le facce sono poligoni regolari (2) tutte le facce sono uguali fra loro

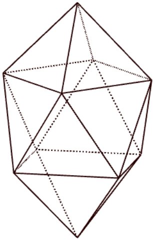
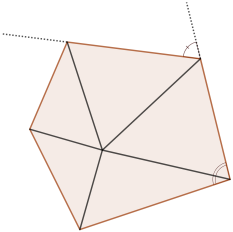


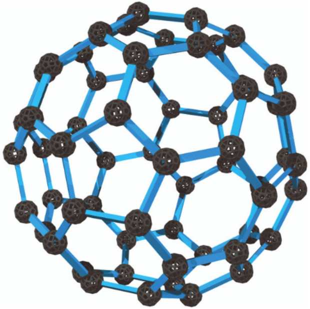
Figura: Esempio di poliedro non regolare

Osservazione 2

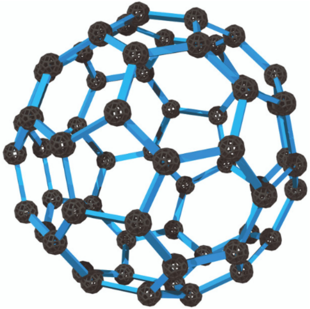
In un poligono di n lati si ha che la somma degli angoli interni è $\pi(n-2)$
La somma degli angoli esterni è sempre 2π.



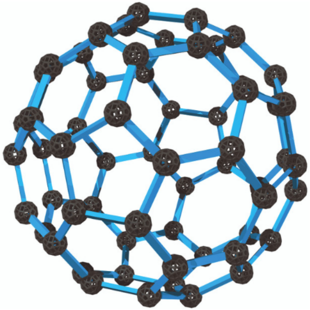
- $\sum \alpha_i = 2\pi (S - F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$ GeoG
- $F + V - S = 2$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ dove $q = \frac{2S}{V}$ e $p = \frac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$ segue



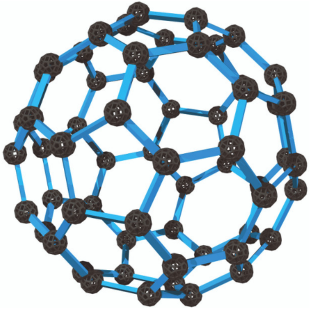
- $\sum \alpha_i = 2\pi\,(S - F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$ GeoG
- $F + V - S = 2$
- $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$ dove $q = \dfrac{2S}{V}$ e $p = \dfrac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$ segue



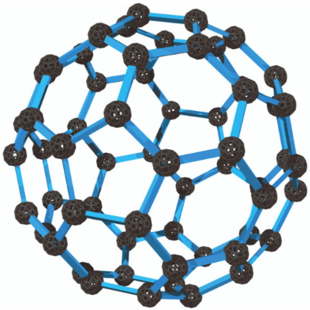
- $\sum \alpha_i = 2\pi\,(S - F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$ GeoG
- $F + V - S = 2$
- $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$ dove $q = \dfrac{2S}{V}$ e $p = \dfrac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$ segue



- $\sum \alpha_i = 2\pi\,(S - F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$ GeoG
- $F + V - S = 2$
- $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$ dove $q = \dfrac{2S}{V}$ e $p = \dfrac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$ segue



- $\sum \alpha_i = 2\pi\,(S - F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$ GeoG
- $F + V - S = 2$
- $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$ dove $q = \dfrac{2S}{V}$ e $p = \dfrac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$ segue



Osservazione 3

Usiamo la cassetta degli attrezzi Tetraedro: $q = 3$, applicando la formula di Eulero:

$$F + \underbrace{\frac{3F}{3}}_{V} - \underbrace{\frac{3F}{2}}_{S} = 2$$

e quindi $F = 4$, $V = 4$ e $S = 6$.
Ottaedro: $q = 4$, applicando la formula di Eulero:

$$F + \underbrace{\frac{3F}{4}}_{V} - \underbrace{\frac{3F}{2}}_{S} = 2$$

e quindi $F = 8$, $V = 6$ e $S = 12$.

Problema 6.1

Esaedro? Dodecaedro? Icosaedro?

Problema 6.1

Esaedro? Dodecaedro? Icosaedro?

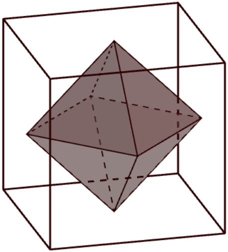
Esaedro (cubo) $F+\dfrac{4F}{3}-\dfrac{4F}{3}=2 \qquad F=6\ V=8\ S=12$

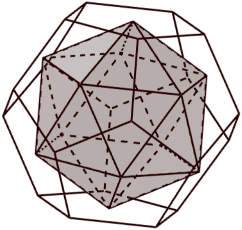
Dodecaedro $F+\dfrac{5F}{3}-\dfrac{5F}{2}=2 \qquad F=12\ V=20\ S=30$

Icosaedro $F+\dfrac{3F}{5}-\dfrac{3F}{2}=2 \qquad F=20\ V=12\ S=30$

Osservazione 4

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Esaedro} & \underbrace{F}_{6} + \underbrace{V}_{8} - \underbrace{S}_{12} = 2 \\
\textit{Ottaedro} & \underbrace{F}_{8} + \underbrace{V}_{6} - \underbrace{S}_{12} = 2 \\
\\
\textit{Dodecaerdo} & \underbrace{F}_{12} + \underbrace{V}_{20} - \underbrace{S}_{30} = 2 \\
\textit{Icosaedro} & \underbrace{F}_{20} + \underbrace{V}_{12} - \underbrace{S}_{30} = 2
\end{array}
$$





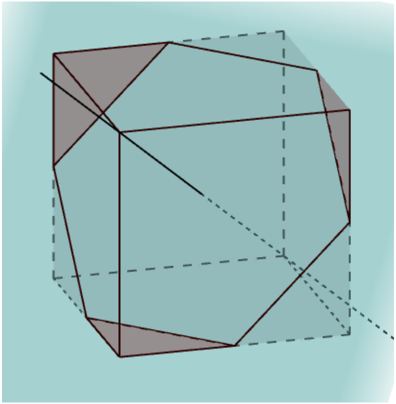
Problema 6.2 (febbraio 2023 ex. 8)

Dato un cubo di lato 10, consideriamo un piano che passi per esattamente 6 dei punti medi dei suoi spigoli; chiamiamo tali punti A, B, C, D, E, F e supponiamo che i lati dell'esagono $ABCDEF$ giacciano ciascuno su una faccia del cubo. Consideriamo poi un secondo piano contenente il segmento AB e perpendicolare alla faccia contenente AB. Quanto vale il volume della porzione del cubo contenuta fra i due piani?

Problema 6.3

Dato un cubo di lato 10, consideriamo un piano che passi per esattamente 6 dei punti medi dei suoi spigoli; chiamiamo tali punti A, B, C, D, E, F e supponiamo che i lati dell'esagono $ABCDEF$ giacciano ciascuno su una faccia del cubo

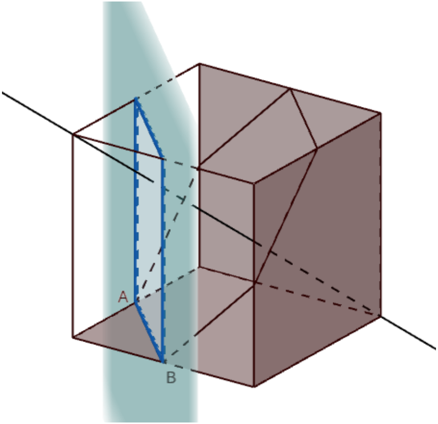
.

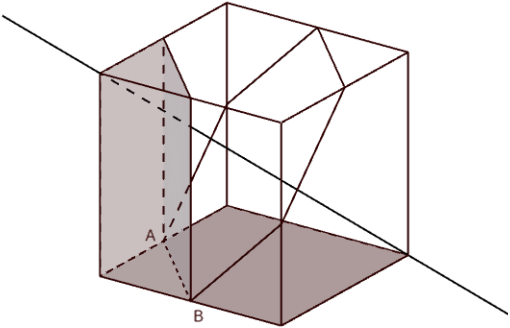


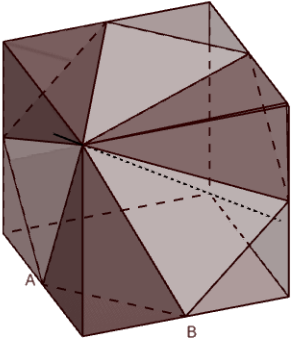
Problema 6.4

Consideriamo poi un secondo piano contenente il segmento AB e perpendicolare alla faccia contenente AB.

.




A
B

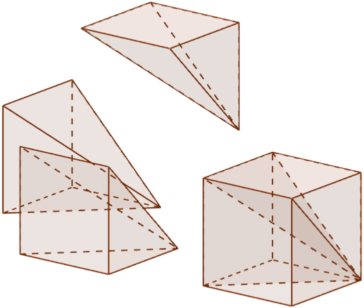

A
B

Problema 6.5

Scomporre un cubo in tre piramidi equivalenti.

Problema 6.5

Scomporre un cubo in tre piramidi equivalenti.

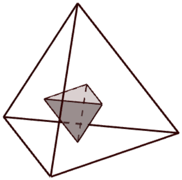


Riprendiamo il concetto di dualità

Osservazione 5

Il tetraedro:

$$\underbrace{F}_{4} + \underbrace{V}_{4} - \underbrace{S}_{6} = 2$$

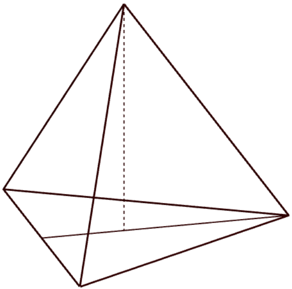


Problema 6.6

Proseguendo la costruzione di tetraedri "dentro" tetraedri quale sarà il rapporto fra il volume del primo tetraedro con quello ottenuto dopo n passi?

Osservazione 6

Volume del tetraedro

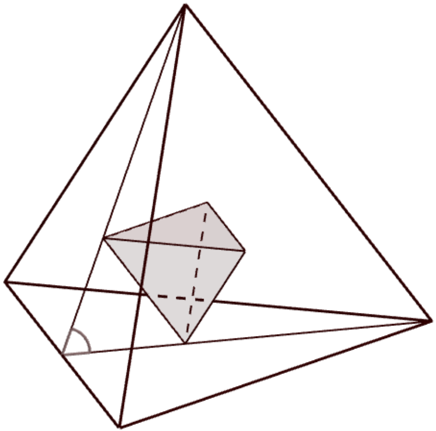


s spigolo del tetraedro:

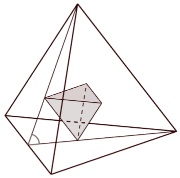
$$Area_{base} = s^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$h_{\text{altezza tetraedro}} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2}$$

$$V = s^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = ks^3$$



s spigolo del tetraedro:



$$
\begin{aligned}
s_0 &= s_0 & V_0 &= ks_0^3 \\
s_1 &= s_0\frac{1}{3} & V_0 &= ks_1^3 = \underbrace{k\cdot s_0^3}_{V_0}\frac{1}{3^3} \\
s_2 &= s_0\left(\frac{1}{3}\right)^2 & V_1 &= V_0\frac{1}{3^6} \\
&\dots \\
s_n &= s_0\left(\frac{1}{3}\right)^n & V_n &= V_0\frac{1}{3^{3n}}
\end{aligned}
$$

Problema 6.7

Quanto vale il rapporto fra la somma di tutti i tetraedri costruiti "dentro" il tetraedro di partenza e il tetraedro stesso?

Soluzione.

$$V_{tot} = \frac{\cancel{V_0}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{3k}}\right)}{\cancel{V_0}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{27^k} - 1$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{27^{n+1}}}{1 - \frac{1}{27}} - 1 \to \frac{1}{26}$$

□

Soluzione.

$$V_{tot} = \frac{\cancel{V_0}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{3k}}\right)}{\cancel{V_0}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{27^k} - 1$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{27^{n+1}}}{1 - \frac{1}{27}} - 1 \to \frac{1}{26}$$

$$1 - x^2 = (1-x)(x+1) \;\Rightarrow\; x + 1 = \frac{1-x^2}{1-x}$$

$$1 - x^3 = (1-x)(x^2+x+1) \;\Rightarrow\; x^2 + x + 1 = \frac{1-x^3}{1-x}$$

$$1 - x^4 = (1-x)(x^3+x^2+x+1)$$

$$\Rightarrow\; x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1-x^4}{1-x}$$

$$\cdots$$

$$1 - x^n = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$\Rightarrow\; x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$\square$

Problema 6.8

Quanti pentagoni ha un pallone da calcio?

Soluzione.

Il  è un poliedro $(6, 5, 6)$ cioè in ogni vertice convergono 2 esagoni e un pentagono. Valenza $q = 3$.

$$\underbrace{E + P}_{F} + \frac{\overbrace{6E + 5P}^{V}}{3} - \frac{\overbrace{6E + 5P}^{S}}{2} = 2$$

$$6P + 6E + 12E + 10P - 18E + 15P = 2$$

$$P = 12$$

Problema 6.9

E quanti sono gli esagoni?

Soluzione.

Utilizziamo: $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$

$$\left(2\frac{2}{3}\pi + \frac{3}{5}\pi\right) V = 2\pi V - 4\pi$$

$$V\left(2\pi - \frac{29}{15}\pi\right) = 4\pi \;\Rightarrow\; V = 60$$

$$\frac{6E + 5\overbrace{P}^{12}}{3} = 2 \;\Rightarrow\; E = 20$$

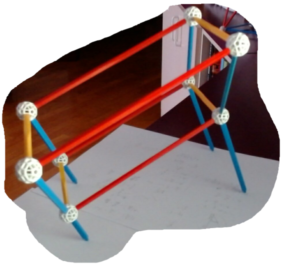
□

Problema 6.10

Sia π un assegnato piano, e $ABCDA_1B_1C_1D_1$ il prisma $\mathcal{P}$ le cui facce sono parallelogrammi. $\mathcal{P}$ è interamente contenuto in uno dei due semispazi individuati da π. Ricava il luogo dei punti $E \in \pi$ tali che $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 + A_1E^2 + B_1E^2 + C_1E^2 + D_1E^2 = k$, essendo k una costante positiva assegnata.

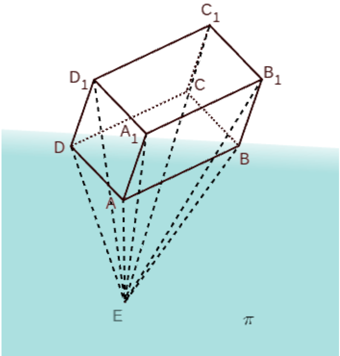
Problema 6.10

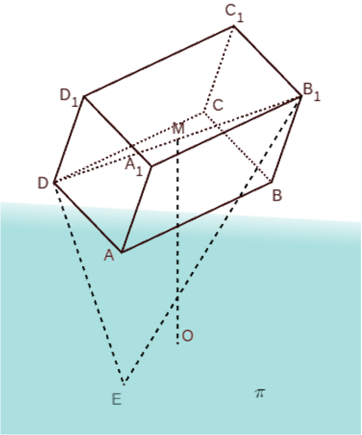
Sia π un assegnato piano, e $ABCDA_1B_1C_1D_1$ il prisma $\mathcal{P}$ le cui facce sono parallelogrammi. $\mathcal{P}$ è interamente contenuto in uno dei due semispazi individuati da π. Ricava il luogo dei punti $E \in \pi$ tali che $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 + A_1E^2 + B_1E^2 + C_1E^2 + D_1E^2 = k$, essendo k una costante positiva assegnata.

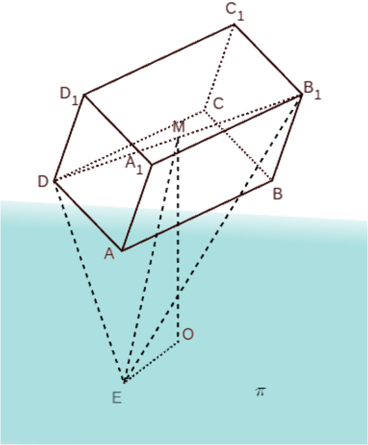


Problema 6.10

Sia π un assegnato piano, e $ABCDA_1B_1C_1D_1$ il prisma $\mathcal{P}$ le cui facce sono parallelogrammi. $\mathcal{P}$ è interamente contenuto in uno dei due semispazi individuati da π. Ricava il luogo dei punti $E \in \pi$ tali che $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 + A_1E^2 + B_1E^2 + C_1E^2 + D_1E^2 = k$, essendo k una costante positiva assegnata.



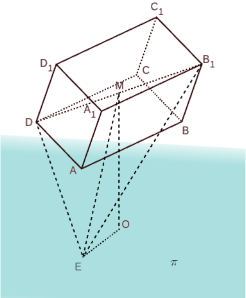

C1
D1
B1
C
M
A1
D
B
A
O
E
π


C1
D1
C
B1
M
A1
D
B
A
O
E
π

$$ED^2 \underbrace{=}_{\text{th coseno}} DM^2 + ME^2 - 2DM \cdot ME \cos\left(\underbrace{E\widehat{M}D}_{=\alpha}\right)$$
$$EB_1^2 = DM^2 + ME^2 - 2DM \cdot ME \cos(\pi - \alpha)$$
$$EB_1^2 = DM^2 + ME^2 + 2DM \cdot ME \cos(\alpha)$$

Sommando membro si ottiene

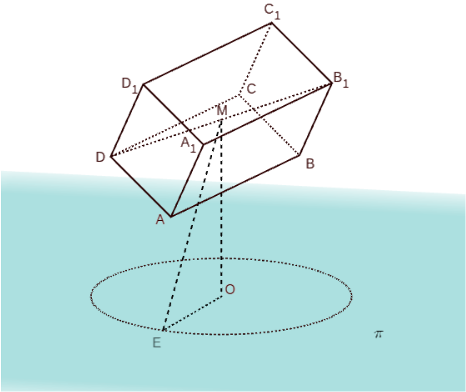
$$ED^2 + EB_1^2 = 2DM^2 + 2ME^2$$
$$2ME^2 = ED^2 + EB_1^2 - 2DM^2$$



Ripetendo per ogni coppia di vertici opposti si ricava

$$8ME^2 = \underbrace{AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 + A_1P^2 + B_1P^2 + C_1P^2 + D_1P^2}_{=k} - 2\left(\underbrace{MD^2 + MA^2 + MA_1^2 + MD_1^2}_{\text{costante}}\right)$$

$ME^2 - MO^2 = OE^2$ costante th-coseno



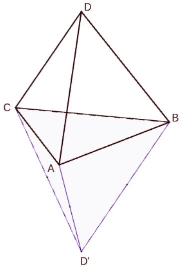
C_1
D_1
B_1
C
M
A_1
D
B
A
O
E
π

...a $\mathcal{V}$oi ...$\mathcal{E}$sercizi

http://www.joaogas.it/index.php

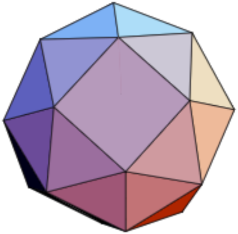
Problema 7.1

Dato il poliedro non regolare in figura, calcola l'angolo diedro individuato dalle facce ACD e CAD' sol



Problema 7.2

Dato il poliedro uniforme $(3, 3, 3, 3, 4)$ calcola F, quante sono triangoli T e quante quadrati Q, V ed S. sol



Problema 7.3

Costruisci un tetraedro in cui le quattro facce sono tutte triangoli rettangoli (definito quadriretto). Dimostra che se una faccia ha i cateti di lunghezza 3 *cm* e 4 *cm*, è possibile costruire infiniti quadriretti di altezza compresa fra 1 *cm* e 5 *cm*. sol

Problema 7.4

Ricava il volume del più grande tetraedro regolare contenuto in dato cubo di spigolo ℓ. sol

Problema 7.5

Sia $\mathcal{T} = ABCD$ un tetraedro regolare, detti O_A, O_B, O_C ed O_D i baricentri delle quattro facce, i segmenti AO_A, BO_B, CO_C e DO_D si incontrano in un punto G (baricentro del tetraedro). Ricava che $AG = 3GO_A$, $BG = 3GO_B$, $CG = 3GO_C$ e $DG = 3GO_D$. sol

Problema 7.6

Sia $\mathcal{T} = ABCD$ un tetraedro regolare, detti $CG = CF = AE = AH = x$, dove $E \in AB$, $F \in CB$, $G \in CD$ e $H \in AD$, determina x in modo che il quadrilatero $EFGH$ abbia area massima. sol

Problema 7.7

Sia $\mathcal{T} = ABCD$ una piramide di base il triangolo ABC rettangolo in A. E, F, G sono i punti medi rispettivamente di CB, CA e AB. $DF \perp CA$ e $DG \perp AB$. Dimostra che $DE \perp ABC$. sol

Problema 7.8

Sia $\mathcal{T} = ABCD$ un tetraedro in cui le facce ABC e CDA sono triangoli rettangoli (in B e D). Sia M punto medio di BD e N punto medio di AC. Sapendo che $AM = MC$ dimostra che MN è la minima distanza fra le due rette sghembe (non complanari) AC e BD.

sol

Problema 7.9

Sia π il piano passante per il centro di un cubo $\mathcal{C}$ che interseca 6 dei 12 spigoli nei punti medi. Sia $\mathcal{E} = \mathcal{C} \cap \pi$. Costruisci l'esagono $\mathcal{E}'$ ottenuto congiungendo le intersezioni dei prolungamenti degli altri 6 spigoli con il piano π. Se l'area di $\mathcal{E}$ misura $Area_{\mathcal{E}} = 674\ cm^2$, quanto misura $Area_{\mathcal{E}'}$?

sol

Problema 7.10

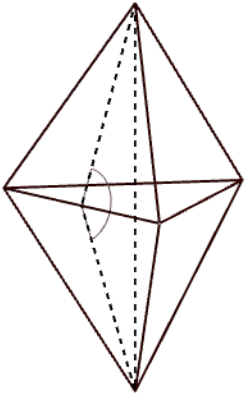
Ne paese “tuttotondo” dato che tutto è rotondo si ha che $\pi = 1$ ma la geometria che si utilizza è quella euclidea.
Un famoso architetto ha collocato all’interno di un grande tetraedro trasparente la sfera (in acciaio) inscritta e altre quattro sfere, sempre di acciaio, più piccole e tangenti alla sfera principale e alle tre facce che concorrono in ciascuno dei quattro vertici del tetraedro. Se l’altezza del tetraedro è 48 quanto misura il volume totale delle sfere d’acciaio? sol

Problema 7.11

L'architetto Sfera, visto il successo ottenuto con la precedente costruzione decide di continuare ad aggiungere nuove sferette, sempre con le stesse modalità. Se ne aggiungesse un numero veramente grande a che valore sommerebbero i volumi delle sferette? sol

Problema 7.1

Altezza delle facce CAD e CAD' $\ell\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ altezza del tetraedro $\ell\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, applicando il teorema del coseno si ha: $4\ell^2\dfrac{2}{3} = 2\ell^2\dfrac{3}{4} - 2\ell^2\dfrac{3}{4}\cos\alpha$ da cui $\cos\alpha = -\dfrac{7}{9}$. esercizi

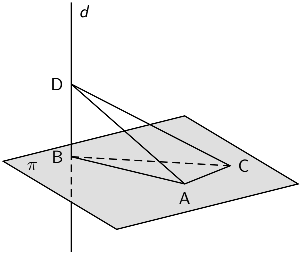


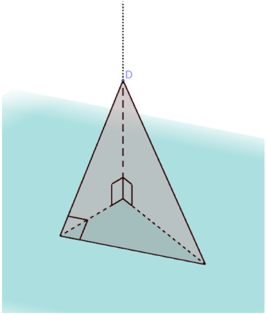
$$\sum \alpha_i = \sum_{i=1}^{F} \pi (n_i - 2)$$
$$= \pi \sum_{i=1}^{F} n_i - 2\pi F$$
$$= 2\pi S - 2\pi F$$

attrezzi

T numero di facce triangolari
Q numero di quadrati
Si ha $\underbrace{Q+T}_{F}+\underbrace{\frac{4Q+3T}{5}}_{V}-\underbrace{\frac{4Q+3T}{2}}_{S}=2$ da cui semplificando si ottiene:
$T-2Q=20$, ed ancora, $\underbrace{V\left(4\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}_{\sum\alpha_i}=2\pi V-4\pi$ da cui si ricava:
$V=24$ ma essendo $V=\dfrac{4Q+3T}{5}$ si ricava $Q=6,\ T=32$ e di conseguenza $F=38$ e $S=60$ esercizio

Sul piano π , sia ABC il triangolo rettangolo in A. Detta d la retta perpendicolare, in B, al piano π. Scelto su d un punto D diverso da B, si ottiene, utilizzando il teorema delle tre perpendicolari, che il tetraedro $ABCD$ è un quadriretto.



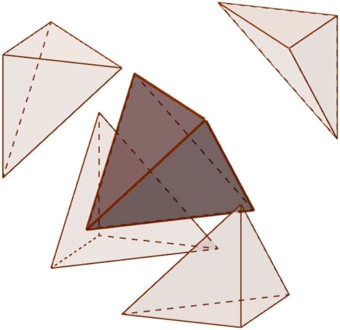


esercizio

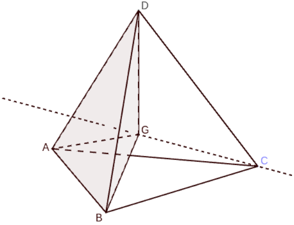
Volume del cubo: ℓ^3,
volume del tetraedro
si spigolo s: $\dfrac{\sqrt{2}}{12}s^3$.

$$s = \ell\sqrt{2} \;\Rightarrow\; V_{tetraedro} = \frac{\ell^3}{3}$$

esercizio

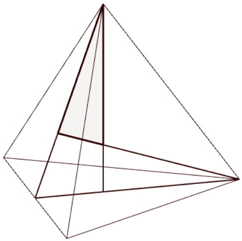


Il baricentro divide il tetraedro in quattro parti equivalenti, pertanto l'altezza di ciascuna parte è $\frac{1}{4}$ dell'altezza del tetraedro.



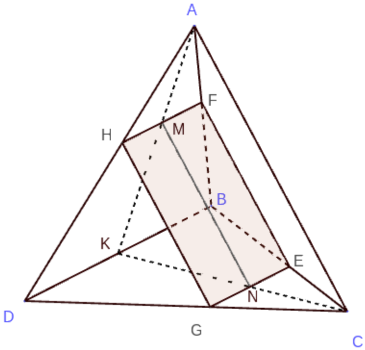
$h_T = \ell\sqrt{\frac{2}{3}}\ h_F = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}$
Triangoli simili:

$$\ell\sqrt{\frac{2}{3}} : \ell\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{3} = x : \ell\frac{\sqrt{3}}{6}$$



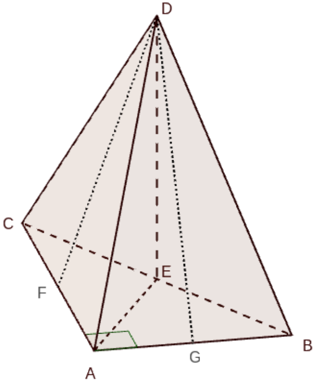
esercizio

$\mathcal{R}$ è un rettangolo: intanto è un parallelogramma in quanto i triangoli $DGH = BEF$ e $EGC = HFA$, equilateri per costruzione, $AK \perp HF$ in M, $CK \perp EG$ in N, $MN \parallel AC$ e quindi $EG \perp MN$.
$Area_{\mathcal{R}} = x(\ell - x)$ essendo una parabola assume valore massimo nel vertice: $x = \dfrac{\ell}{2}$, cioè $\mathcal{R}$ è un quadrato.



esercizio Un contributo "grafico" GeoG

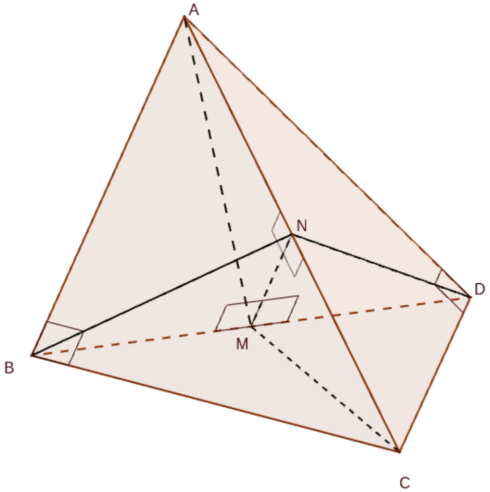
Per ipotesi i triangoli CAD e ABD sono isosceli, quindi $DC = DA = DB$ pertanto anche CBD è isoscele ed essendo E punto medio di CB si ha che $DE \perp CB$, ora dato che CAB è rettangolo si ha che $AE = EB$ da cui $BDE = AED$ (tre lati uguali) segue $DE \perp AE$.



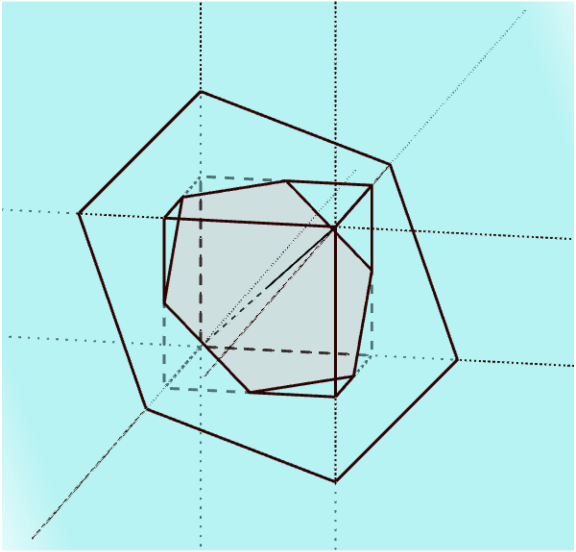
esercizio

Problema 7.8

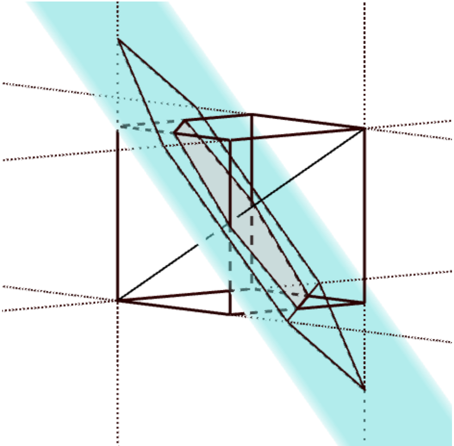
Sia $\mathcal{T} = ABCD$ un tetraedro in cui le facce ABC e CDA sono triangoli rettangoli (in B e D). Sia M punto medio di BD e N punto medio di AC. Sapendo che $AM = MC$ dimostra che MN è la minima distanza fra le due rette sghembe (non complanari) AC e BD.



esercizio

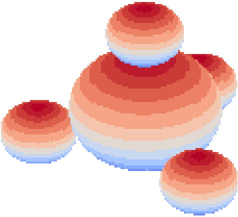


esercizio



esercizio

$$r_{sfera-1} = \frac{48}{4} = 12$$
$$r_{sfera-2} = \frac{24}{4} = 6$$
$$V_{5-sfere} = \frac{4}{3}\left(12^3 + 4 \cdot 6^3\right) = 3456$$



esercizio

$$V_{n-sfere} = \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty} 4^k \cdot \left(\frac{12}{2^k}\right)^3$$

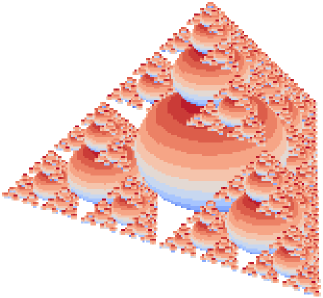
$$= \frac{4}{3} \cdot 12^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} \cdot \frac{1}{2^{3k}}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 12^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 12^3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4608$$

esercizio



Teorema 3

Non esiste un poliedro con sette spigoli

Dimostrazione.

Per un poliedro con sette spigoli si ha: $F + V - \underbrace{7}_{S} = 2$, cioè $F + V = 9$,

dato che $F \geq 4 \vee V \geq 4$ si ha:

se $V = 4$ allora $F = 5$ quindi $p = \dfrac{14}{5} < 3$

se $V = 5$ allora $F = 4$ quindi $V = 5 \leq 2F - 4 = 4$ falso. □

attrezzi

Definizione 6

Un sottospazio connesso $S \in \mathbb{R}^3$ è una superficie poliedrale se è l'unione di un numero finito di poligoni P_j nello spazio (le facce del poliedro) in modo che:

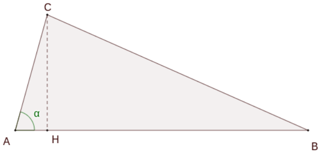
1. l'intersezione di due facce, se non è vuota, è o uno spigolo o un vertice comune alle due facce;
2. ogni spigolo appartiene ad esattamente due facce;
3. due facce adiacenti non sono complanari;
4. comunque si fissi un vertice V, e due facce f e g che contengono V, esiste una catena di facce $f_1 \ldots f_n$, tutte contenenti V, e tali che $f = f_1$ $g = f_n$ e f_i sia adiacente a f_{i+1}, per ogni $i = 1, \ldots, n$
5. comunque si fissi una poligonale formata da spigoli di S, questa è il bordo dell'unione di un certo numero di facce di S.

dim

Richiami di trigonometria

Teorema 4

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\alpha)$$



luogo