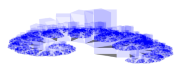
Geo-3D ...e ...non solo

Gianpaolo Gasparin http://www.joaogas.it

febbraio $7 \cdot 17^2$



- Un piano è individuato da tre punti non allineati
- Due punti individuano una retta
- Due rette che si intersecano sono complanari
- Tre rette ciascuna delle quali taglia le altre appartengono allo stesso piano.

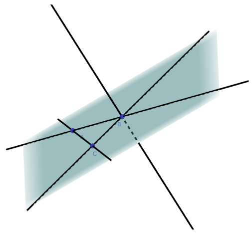
- Un piano è individuato da tre punti non allineati
- Due punti individuano una retta
- Due rette che si intersecano sono complanari
- Tre rette ciascuna delle quali taglia le altre appartengono allo stesso piano.

Teoria tar.gz 1

- Un piano è individuato da tre punti non allineati
- Due punti individuano una retta
- Due rette che si intersecano sono complanari
- Tre rette ciascuna delle quali taglia le altre appartengono allo stesso piano.

$\mathcal{J}$oao Geo-3D ...e ...non solo febbraio $7 \cdot 17^2$ 2 / 74

- Un piano è individuato da tre punti non allineati
- Due punti individuano una retta
- Due rette che si intersecano sono complanari
- Tre rette ciascuna delle quali taglia le altre appartengono allo stesso piano.



- Se tre rette non complanari si intersecano, a due a due, allora si intersecano nello stesso punto.
- Se due piani si intersecano, la loro sezione è una retta.
- Se una retta è perpendicolare a due rette, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare al piano delle due rette.

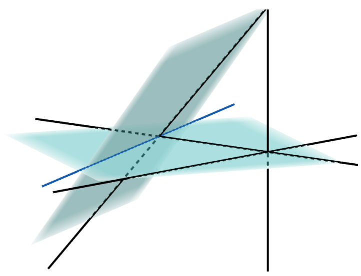
- Se tre rette non complanari si intersecano, a due a due, allora si intersecano nello stesso punto.
- Se due piani si intersecano, la loro sezione è una retta.
- Se una retta è perpendicolare a due rette, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare al piano delle due rette.

Teoria tar.gz 1

- Se tre rette non complanari si intersecano, a due a due, allora si intersecano nello stesso punto.
- Se due piani si intersecano, la loro sezione è una retta.
- Se una retta è perpendicolare a due rette, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare al piano delle due rette.

$\mathcal{J}$oao | Geo-3D ...e ...non solo | febbraio $7 \cdot 17^2$ | 4 / 74

- Se tre rette non complanari si intersecano, a due a due, allora si intersecano nello stesso punto.
- Se due piani si intersecano, la loro sezione è una retta.
- Se una retta è perpendicolare a due rette, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare al piano delle due rette.

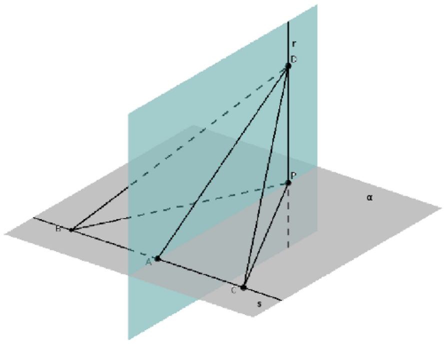


Teorema 1

Se dal piede P di una retta r perpendicolare al piano α si conduce la perpendicolare PA ad una retta $s \in \alpha$ allora la retta s è perpendicolare al piano delle rette r e PA.

Teorema 1

Se dal piede P di una retta r perpendicolare al piano α si conduce la perpendicolare PA ad una retta $s \in \alpha$ allora la retta s è perpendicolare al piano delle rette r e PA.



- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

Teoria tar.gz 1

- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

$\mathcal{J}$oao Geo-3D ...e ...non solo febbraio $7 \cdot 17^2$ 8 / 74

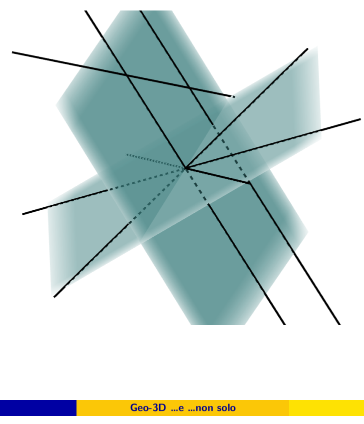
- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

Teoria tar.gz 1

- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.

$\mathcal{J}$oao Geo-3D ...e ...non solo febbraio 7 · 17^2 8 / 74

- Se tre rette si incontrano in un punto e una retta è perpendicolare a ciascuna di esse in quel punto, allora le tre rette appartengono allo stesso piano.
- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.
- Se due rette sono parallele, la retta che unisce un punto qualsiasi dell'una con un punto qualsiasi dell'altra è sullo stesso piano individuato dalle due rette.
- Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, l'altra è perpendicolare a quel piano.
- Rette parallele alla stessa retta, anche non complanari, sono parallele tra loro.
- Dato un piano è possibile tracciare una sola perpendicolare al piano da un dato punto sia interno che esterno al piano.



- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

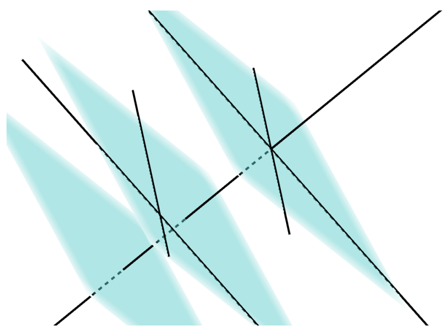
- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

Teoria tar.gz 1

- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

$\mathcal{J}$oao Geo-3D ...e ...non solo febbraio 7 · 17^2 10 / 74

- I piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.
- Se due rette che si intersecano in un piano sono rispettivamente parallele a due rette che si intersecano in un altro piano allora i piani sono paralleli.
- Se due piani paralleli sono tagliati da un piano qualsiasi, le loro sezioni comuni con esso sono parallele.
- Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare a quel piano.

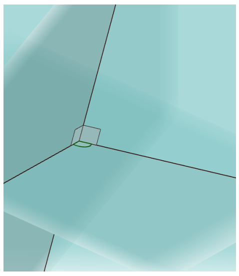


Definizione 1

Si definisce diedro l'intersezione di due semispazi, la retta intersezione è detta costola.

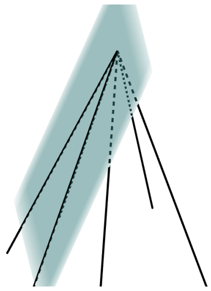
Definizione 2

L'angolo piano sezione di un diedro con un piano perpendicolare alla costala si definisce angolo diedro.

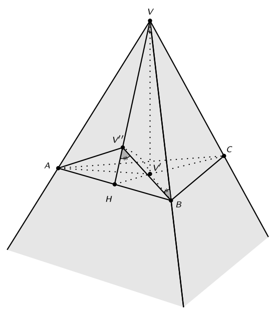


Definizione 3

Date in un certo ordine n semirette aventi origine comune, a tre a tre non complanari, e tale che il piano individuato da due semirette consecutive lasci tutte le altre da una stessa parte. L'intersezione degli n semispazi che hanno per origine quei piani e che contengono le $n-2$ semirette restanti è detto **Angoloide**



Teorema 2
La somma delle facce che insistono su di un vertice è minore di 2π



Definizione 3

Un poliedro è una regione limitata dello spazio il cui bordo è costituito da poligoni aventi a due a due uno spigolo in comune. dim

Definizione 4

Poliedri regolari, sono quei poliedri che presentano la massima possibile simmetria. Sono i poliedri in cui sia i vertici, sia gli spigoli, sia le facce sono indistinguibili rispetto all'azione del gruppo di simmetria.

Osservazione 1

Ci possono essere solo **cinque poliedri regolari**.

3 triangoli equilateri	4 triangoli equilateri	5 triangoli equilateri	3 quadrati	3 pentagoni
$3\alpha = 3\frac{\pi}{3} = \pi < 2\pi$	$4\alpha = 4\frac{\pi}{3} < 2\pi$	$5\alpha = 5\frac{\pi}{3} < 2\pi$	$3\alpha = 3\frac{\pi}{2} < 2\pi$	$3\alpha = \frac{9\pi}{5} < 2\pi$
				

Definizione 4

Poliedri regolari, sono quei poliedri che presentano la massima possibile simmetria. Sono i poliedri in cui sia i vertici, sia gli spigoli, sia le facce sono indistinguibili rispetto all'azione del gruppo di simmetria.

Definizione 5

Un poliedro convesso $\mathcal{P}$ si dice regolare se:

1. tutte le facce sono poligoni regolari
2. tutte le facce sono uguali fra loro
   Detta q la valenza del poliedro, q è il numero delle facce che convergono in ogni vertice.
3. tutti i vertici hanno la stessa valenza q

(1)tutte le facce sono poligoni regolari (3) tutti i vertici hanno la stessa valenza q

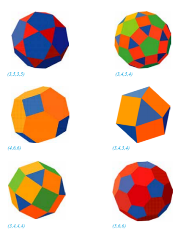


Figura: Esempi di poliedri uniformi

(1)tutte le facce sono poligoni regolari (2) tutte le facce sono uguali fra loro

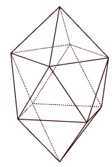
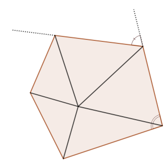


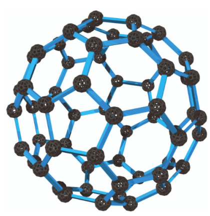
Figura: Esempio di poliedro non regolare

Osservazione 2

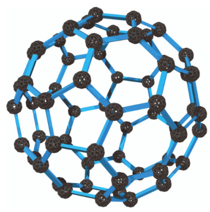
In un poligono di n lati si ha che la somma degli angoli interni è $\pi(n-2)$
La somma degli angoli esterni è sempre 2π.



- $\sum \alpha_i = 2\pi\,(S-F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$
- $F+V-S=2$
- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ dove $q=\frac{2S}{V}$ e $p=\frac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V-4$ e $V \leq 2F-4$

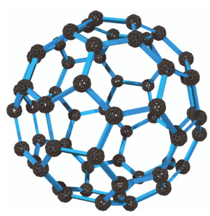


- $\sum \alpha_i = 2\pi(S-F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$ GeoG
- $F+V-S=2$
- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ dove $q=\frac{2S}{V}$ e $p=\frac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V-4$ e $V \leq 2F-4$



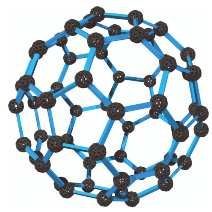
Strumenti per "costruire"

- $\sum \alpha_i = 2\pi(S-F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$ GeoG
- $F+V-S=2$
- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ dove $q=\frac{2S}{V}$ e $p=\frac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V-4$ e $V \leq 2F-4$



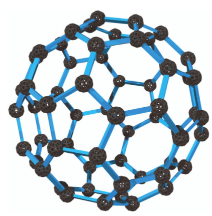
$\mathcal{J}$oao Geo-3D ...e ...non solo febbraio 7 · 17^2 22 / 74

- $\sum \alpha_i = 2\pi\,(S - F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$ GeoG
- $F + V - S = 2$
- $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$ dove $q = \dfrac{2S}{V}$ e $p = \dfrac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$ segue



Strumenti per "costruire"

- $\sum \alpha_i = 2\pi\,(S - F)$ dim
- $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$ GeoG
- $F + V - S = 2$
- $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$ dove $q = \dfrac{2S}{V}$ e $p = \dfrac{2S}{F}$.
- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$ segue



Joao Geo-3D ...e ...non solo febbraio $7 \cdot 17^2$ 22 / 74

Osservazione 3

Usiamo la cassetta degli attrezzi Tetraedro: $q = 3$, applicando la formula di Eulero:

$$F + \underbrace{\frac{3F}{3}}_{V} - \underbrace{\frac{3F}{2}}_{S} = 2$$

e quindi $F = 4$, $V = 4$ e $S = 6$.
Ottaedro: $q = 4$, applicando la formula di Eulero:

$$F + \underbrace{\frac{3F}{4}}_{V} - \underbrace{\frac{3F}{2}}_{S} = 2$$

e quindi $F = 8$, $V = 6$ e $S = 12$.

Problema 6.1

Esaedro? Dodecaedro? Icosaedro?

Problema 6.1

Esaedro? Dodecaedro? Icosaedro?

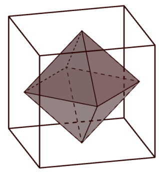
Esaedro (cubo) $F + \frac{4F}{3} - \frac{4F}{3} = 2 \qquad F = 6 \ V = 8 \ S = 12$

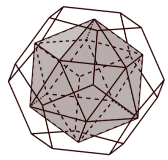
Dodecaedro $F + \frac{5F}{3} - \frac{5F}{2} = 2 \qquad F = 12 \ V = 20 \ S = 30$

Icosaedro $F + \frac{3F}{5} - \frac{3F}{2} = 2 \qquad F = 20 \ V = 12 \ S = 30$

Osservazione 4

$$\begin{aligned}
&\textit{Esaedro} && \underbrace{F}_{6} + \underbrace{V}_{8} - \underbrace{S}_{12} = 2 \\
&\textit{Ottaedro} && \underbrace{F}_{8} + \underbrace{V}_{6} - \underbrace{S}_{12} = 2 \\
&\textit{Dodecaerdo} && \underbrace{F}_{12} + \underbrace{V}_{20} - \underbrace{S}_{30} = 2 \\
&\textit{Icosaedro} && \underbrace{F}_{20} + \underbrace{V}_{12} - \underbrace{S}_{30} = 2
\end{aligned}$$





Problema 6.2 (febbraio 2023 ex. 8)

Dato un cubo di lato 10, consideriamo un piano che passi per esattamente 6 dei punti medi dei suoi spigoli; chiamiamo tali punti A, B, C, D, E, F e supponiamo che i lati dell'esagono $ABCDEF$ giacciano ciascuno su una faccia del cubo. Consideriamo poi un secondo piano contenente il segmento AB e perpendicolare alla faccia contenente AB. Quanto vale il volume della porzione del cubo contenuta fra i due piani?

Problema 6.3

Dato un cubo di lato 10, consideriamo un piano che passi per esattamente 6 dei punti medi dei suoi spigoli; chiamiamo tali punti A, B, C, D, E, F e supponiamo che i lati dell'esagono $ABCDEF$ giacciano ciascuno su una faccia del cubo

.