Introduzione

lunedì 8 dicembre 2025 22:37

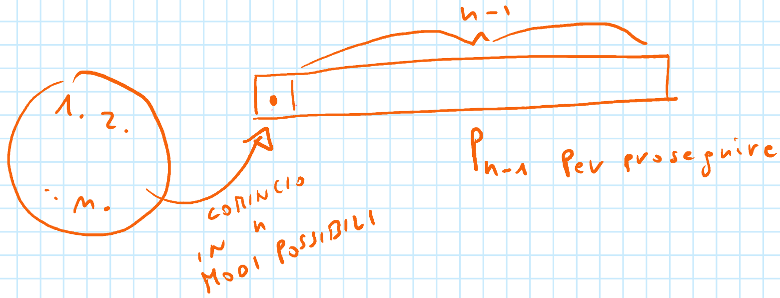
COMBINATORIA RICORSIVA

22/01/2026 P_n

Prof. Carlo Furlanetto

P.1 Le permutazioni P_n di n elementi distinti

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_n = n\, P_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$



$$\boxed{P_n = n P_{n-1} = n(n-1)\, P_{n-2} = \dots = n(n-1)(n-2)\dots P_1 = n!}$$

Problema 2

lunedì 8 dicembre 2025 22:46

COMBINATORIA RICORSIVA

22/01/2026 Pn

Prof. Carlo Furlaneto

P.2 Data la tabella $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \bullet & \ \\ \hline\end{array}$, considera una pulce che salta fra caselle adiacenti partendo dalla casella centrale. Quanti diversi percorsi di 10 salti può fare?

S_n = n° di percorsi con n salti

$S_1 = 2 \qquad S_2 = S_1 = 2$

$S_3 = 2S_2 = 4$

$S_{2n} = S_{2n-1}$

$S_{2n-1} = 2S_{2n-2} = 2S_{2n-3}$

$S_{10} = S_9 = 2S_8 = 2\cdot 2S_6 = 2\cdot 2\cdot 2S_4 = 2^4 S_2 = 2^5$

$S_{2n} = 2^n$

Problema 3

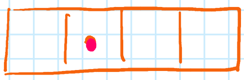
lunedì 8 dicembre 2025 23:04

COMBINATORIA RICORSIVA

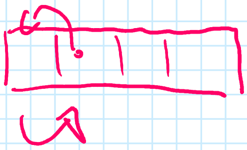
22/01/2026 Pn

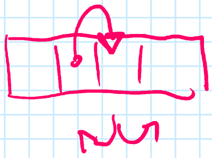
Prof. Carlo Furlaneto

P. 3 Come P. 2 ma con tabella



$S_1 = 2$





C_n = n° di percorsi con n salti a partire dal "centro"

L_n = n° . . . . dal "lato"

$$\begin{cases} L_1 = 1 \\ C_1 = 2 \\ C_n = L_{n-1} + C_{n-1} \\ L_n = C_{n-1} \end{cases} \qquad C_2 = L_1 + C_1 \qquad L_2 = C_1$$

$L_n = C_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} = C_{n-2}$

$C_n = C_{n-1} + C_{n-2} \longrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 3 \\ C_n = C_{n-1} + C_{n-2} \end{cases}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

$$F_n = \frac{(\varphi)^n - (\psi)^n}{\sqrt{5}} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_3 = 2 \quad F_4 = 3$

$C_1 = 2 \quad C_2 = 3$

Problema 4

lunedì 8 dicembre 2025 23:05

COMBINATORIA RICORSIVA

22/01/2026 Pn

Prof. Carlo Furlanetto

P.4 Contare il n° di sequenze lunghe $n \geq 1$ formate da 0 e da 1, dove gli 1 non compaiono mai vicini.

S_1: 1, 0 $= 2$

S_2: 10, 00, 01, ~~11~~ $= 3$

$S_3 =$ 100, 101, 000, 010, 001 → 5

$S_4 \to 8$

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

$$S_n = F_{n+2}$$

Problema 5

lunedì 8 dicembre 2025 23:07

COMBINATORIA RICORSIVA

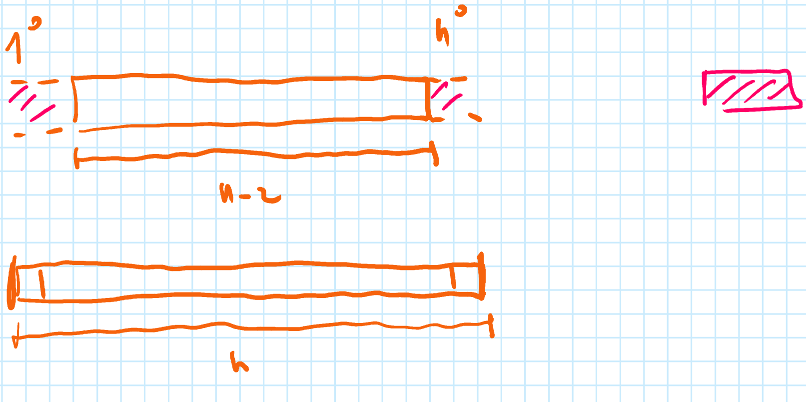
22/01/2026 Pn

Prof. Carlo Furlaneto

P.5 NUMERI DI LUCAS

Considera una striscia con n caselle e crea un anello collegando la prima casella con l'ultima. Conta quanti sono i ricoprimenti con pezzi 1x1 e 2x1

$$L_n = (\varphi)^n + (\psi)^n$$



$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} = F_{n+2}$$

$$A_n = S_n + S_{n-2} = F_{n+2} + F_n$$

Problema 6

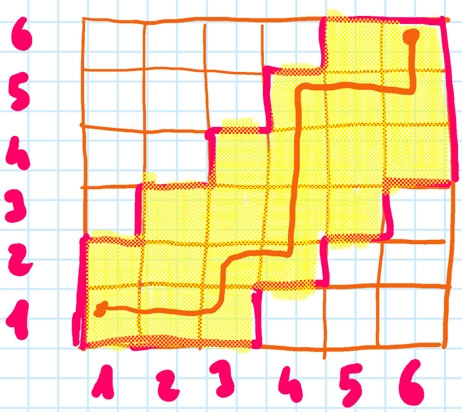
lunedì 8 dicembre 2025 23:10

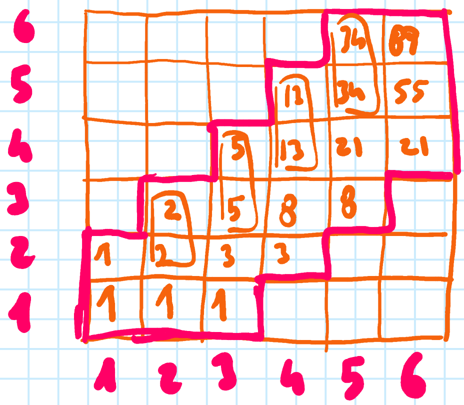
COMBINATORIA RICORSIVA

22/01/2026 Fu

Prof. Carlo Furlanetto

P.6 Contare il n° di percorsi nel quadrato nxn in generale e nel caso n=6 che partono dall'angolo in basso a sinistra e che arrivano nell'angolo in alto a destra con movimenti verso destra o verso l'alto e rimanendo nella regione gialla.





X_n = n° di modi per arrivare in (n,n)

L_n = ... $(n+1, n)$

S_n = ... $(n, n+1)$

$X_1 = 1$ $\quad L_3 \quad$ $X_2 = L_1 + S_1$

$L_1 = 1$ $\quad$ $L_2 = X_2 + L_1$

$S_1 = 1$

$S_n = X_n$

	1	2	3	4	5	6	7 ..
X_n	1	2	5	13	34	89	
L_n	1	3	8	21	55		

$$\begin{cases} X_n = L_{n-1} + X_{n-1} \\ L_n = X_n + L_{n-1} \\ X_1 = L_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} + \begin{cases} X_n = L_{n-1} + X_{n-1} \\ L_{n-1} = X_{n-1} + L_{n-2} \end{cases} \\ - \begin{cases} X_{n-1} = L_{n-2} + X_{n-2} \end{cases} \end{array}$$

$$X_n = 3X_{n-1} - X_{n-2}$$

Problema 7

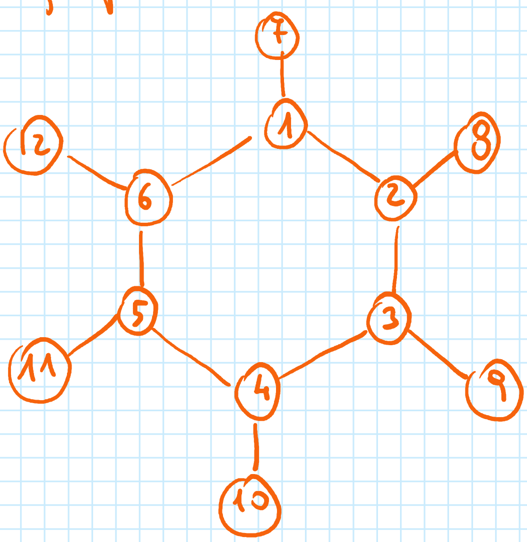
lunedì 8 dicembre 2025 23:17

COMBINATORIA RICORSIVA

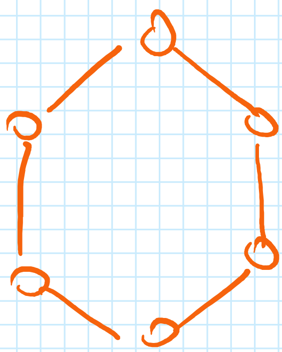
22/01/2026 Pn

Prof. Carlo Furlanetto

P.7 Contare i modi di colorare i vertici del seguente grafo

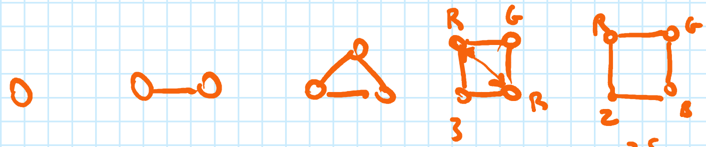


con al più i colori rosso, giallo, verde, blu in modo che i vertici collegati siano di colori diversi.

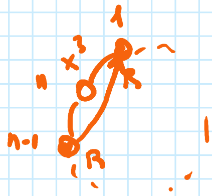


$\times 3^6$

R G V B



$2S_3$



$3S_{n-2}$

$\boxed{S_n = 3S_{n-2} + 2S_{n-1}} \times 3^6$

Problema 8

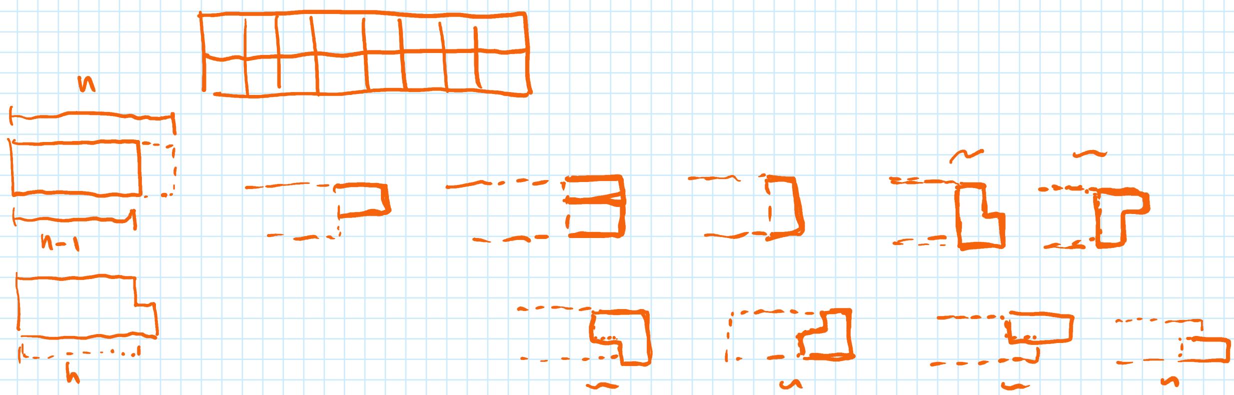
lunedì 8 dicembre 2025 23:17

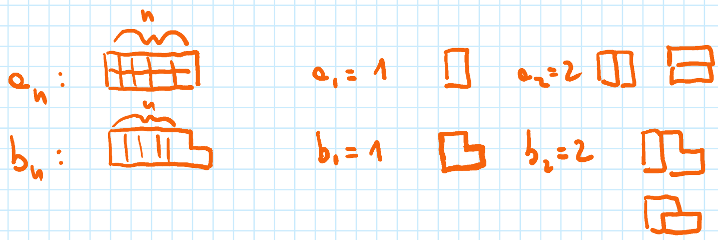
COMBINATORIA RICORSIVA

22/01/2026 Pn

Prof. Carlo Furlaneto

P.8 Contare il n° di ricoprimenti del rettangolo 2x8 ottenibili con pezzi (eventualmente ruotati) della forma





$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 2 \\ b_1 = 1,\ b_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2b_{n-2} & n \geq 3 \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} & n \geq 3 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	2	5	11	24	53	117	$\underline{\underline{258}}$
b_n	1	2	4	9	20	44		

Osservazione

lunedì 8 dicembre 2025 23:23

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2b_{n-2} \quad (1) \rightarrow a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} + 2b_{n-3} \quad (1')$$

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-1} \quad (2) \rightarrow b_{n-2} = b_{n-3} + a_{n-3} \quad (2')$$

ALLORA : $(1) + 2(2') - (1')$ dipende solo da a_n

$$a_n + \cancel{2b_{n-2}} - a_{n-1} = a_{n-1} + \cancel{a_{n-2}} + \cancel{2b_{n-2}} + \cancel{2b_{n-3}} + 2a_{n-3}$$
$$- \cancel{a_{n-2}} - a_{n-3} - \cancel{2b_{n-3}}$$

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3} \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 5 \end{cases}$$