Problema 1. Data l'equazione: $\dfrac{x^2-a^2}{x-b}=x$ possiamo affermare che:

a) se $x \in \mathbb{R}$ ammette sempre soluzione (*rispondi giustificando*)

b) se $x \in \mathbb{N}$ non ammette soluzioni (*rispondi giustificando*)

Problema 2. Risolvi in a la seguente equazione: $\dfrac{a^2-x}{2ax}+\dfrac{x-a}{2x}=\dfrac{1}{a}$

Quesito 1. Come è definita la funzione valore assoluto

Problema 3. Considera il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} ax-by=5 \\ 2by-ax=3 \end{cases} \qquad (1)$$

a) ammette unica soluzione $\forall a,b \in \mathbb{R}$? (motiva la risposta)

b) Spiega perché il seguente sistema $\begin{cases} by=8 \\ 2by-ax=3 \end{cases}$ è equivalente a (1).

Quesito 2. Come è definita la retta tangente ad una circonferenza?

Problema 4. Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC, dimostra che la mediana AM è congruente a MC

Problema 5. In un sacchetto che contiene palline rosse e azzurre, le palline rosse sono 2 di più delle azzurre e la probabilità di estrarre 3 palline tutte rosse è $\dfrac{1}{6}$. Quante sono le palline azzurre?

Quesito 3. Esprimi tramite un monomio in b ed h l'area della regione in grigio (figura 1)

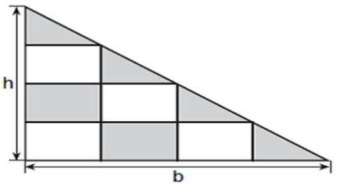


Figura 1

Problema 6. Sia ABC un triangolo scaleno. Prolunga il lato minore AC, dalla parte di A, di un segmento $AD=AB$ e il lato AB, dalla parte di A, di un segmento $AE=AC$. Detto P il punto di intersezione delle rette BC e DE, dimostra che:

a) $BC=DE$;

b) PBD è isoscele;

c) la retta PA interseca CE nel suo punto medio.

Problema 7. Dal rettangolo $ABCD$ vengono sottratti due rettangoli equivalenti di dimensioni x e $2x+1$ come illustrato in figura 2. Sapendo che l'area della parte colorata vale $8x^2-2$, esprimi in funzione di x l'altezza AB.

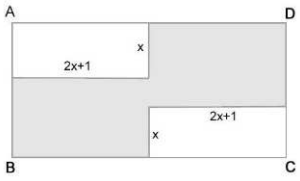
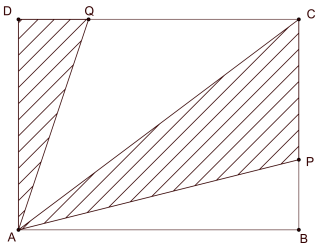


Figura 2

Problema 8. Dati i segmenti $a=30\ cm$, $b=12\ cm$ e $c=10\ cm$, spiega perché non è possibile costruire un triangolo di lati a, b e c.

Spiega se è possibile costruire un triangolo aggiungendo ai tre segmenti a,b,c lo stesso segmento di lunghezza ℓ?

Problema 9. Dato il rettangolo $ABCD$ di dimensioni $AB=a$ e $BC=b$ in cui $BP=DQ$, determina la posizione di P in modo che l'area della parte tratteggiata sia k volte l'area del rettangolo.



Problema 10. Determine all three-digit numbers N having the property that N is divisible by 11, and $\frac{N}{11}$ is equal to the sum of the squares of the digits of N.

Problema 11. (a) Find all positive integers n for which $2^n - 1$ is divisible by 7.

(b) Prove that there is no positive integer n for which $2^n + 1$ is divisible by 7.

Quesito 1. Nell'esperimento del 1 ottobre, (analisi dei risultati presente in DB), si è fatta l'ipotesi teorica che il moto fosse uniformemente accelerato, spiega quali grafici sono stati usati e perché.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 2. Nell'esperimento svolto l'8 ottobre cosa si è cercato di ricavare? Come si è operato e perché? (Analisi sviluppata nei giorni successivi in classe).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 3. Spiega la differenza fra velocità media e velocità istantanea, indica in quali casi la velocità istantanea coincide con la velocità media.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Problema 1. Calcola lo spazio percorso dal mobile (figura 6) nell'intervallo temporale $[1\ s, 7\ s]$

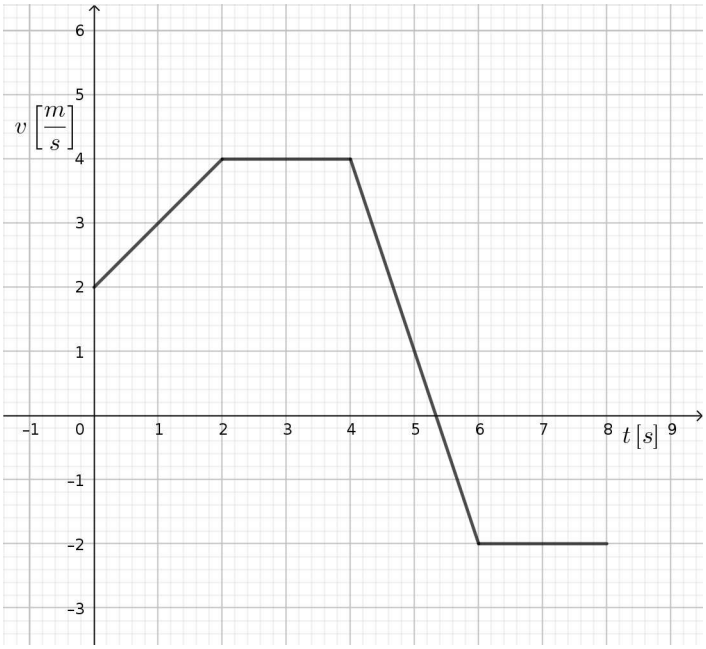


Figura 3

Problema 2. Con riferimento alla figura 6, costruisci nella figura 7 il diagramma spazio tempo ([1]) e nella figura 8 il diagramma accelerazione tempo.

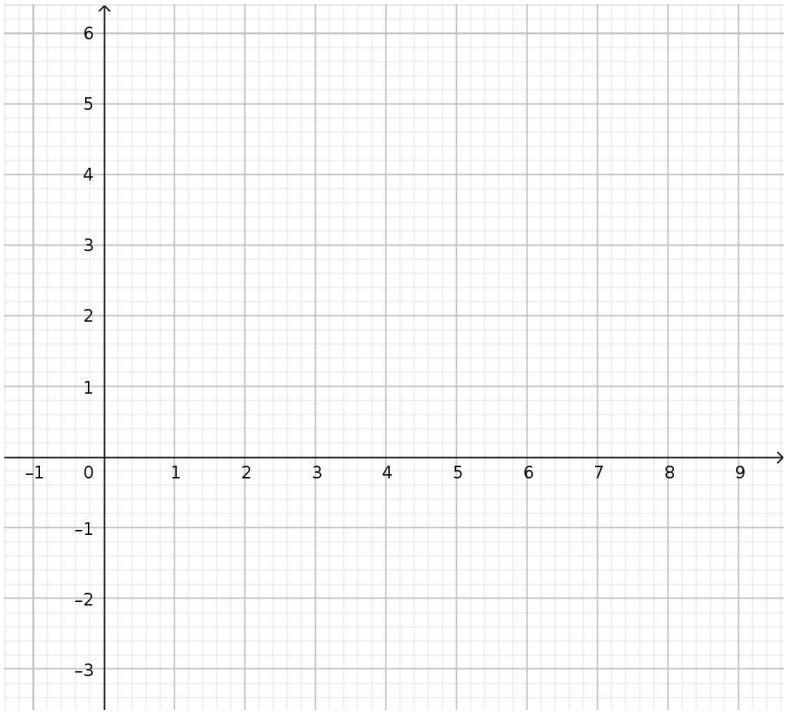


Figura 4: Diagramma (s, t)

[1] il mobile all'istante $t = 0$ ha percorso 0 metri

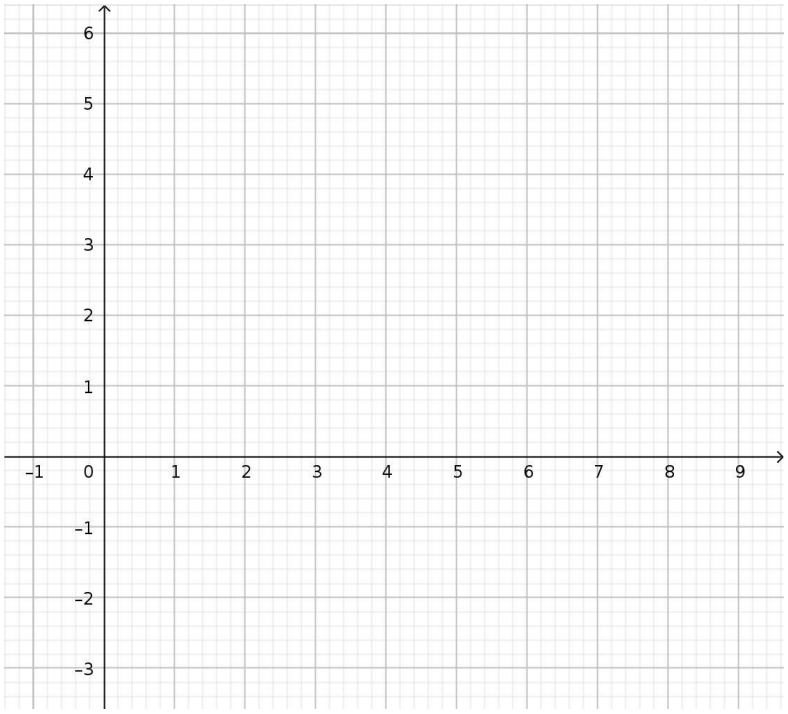


Figura 5: Diagramma (a, t)

Quesito 1. Nell'esperimento del 1 ottobre, (analisi dei risultati presente in DB), sono stati costruiti i diagrammi (t, s) e (t^2, s) spiega perché.

Quesito 2. Spiega come si ricava l'errore assoluto sul prodotto di due grandezze $(g \pm \Delta g)$ e $(h \pm \Delta h)$.
Ti ricordo che $\Delta(fh) = h\Delta f + f\Delta h$.

Quesito 3. Spiega la differenza fra accelerazione media e accelerazione istantanea.

Problema 1. Calcola a che distanza dal punto di partenza si trova il mobile (figura 6) dopo 8 s.

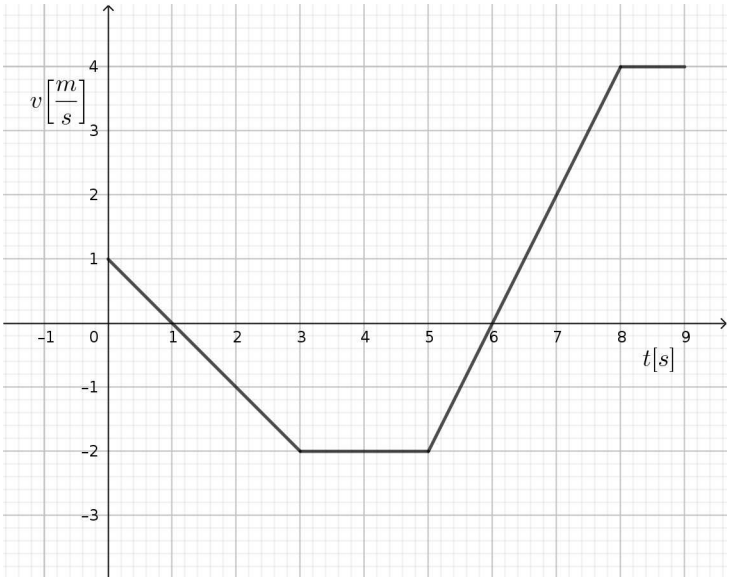


Figura 6

Problema 2. Con riferimento alla figura 6, costruisci nella figura 7 il diagramma spazio tempo ([1]) e nella figura 8 il diagramma accelerazione tempo.

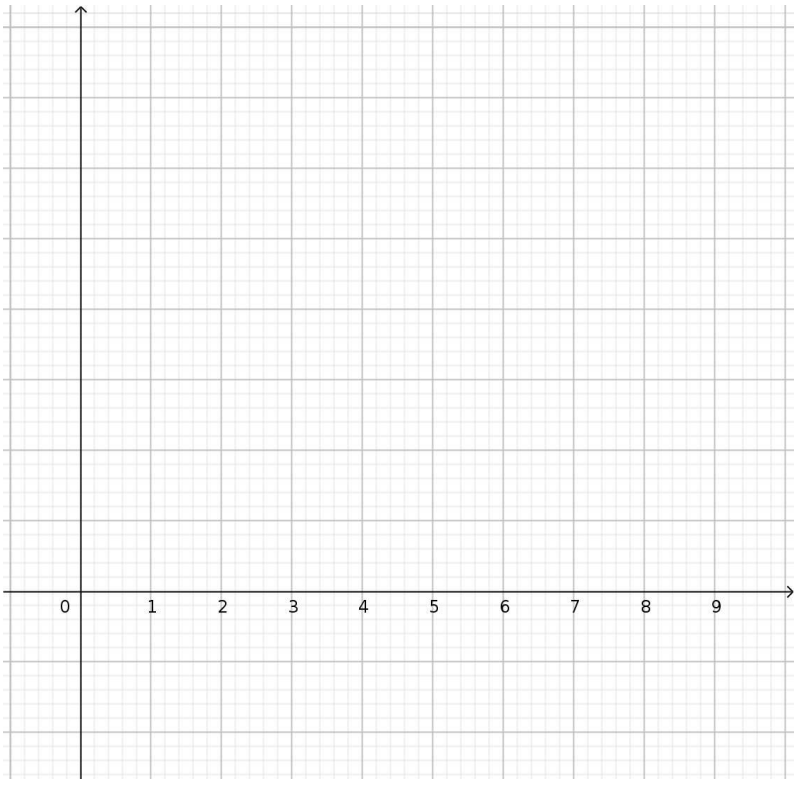


Figura 7: Diagramma (t, s)

Descrivi qui sotto il procedimento utilizzato per costruire il grafico.

[1] il mobile all'istante $t = 0$ si trova nella posizione 4 m.

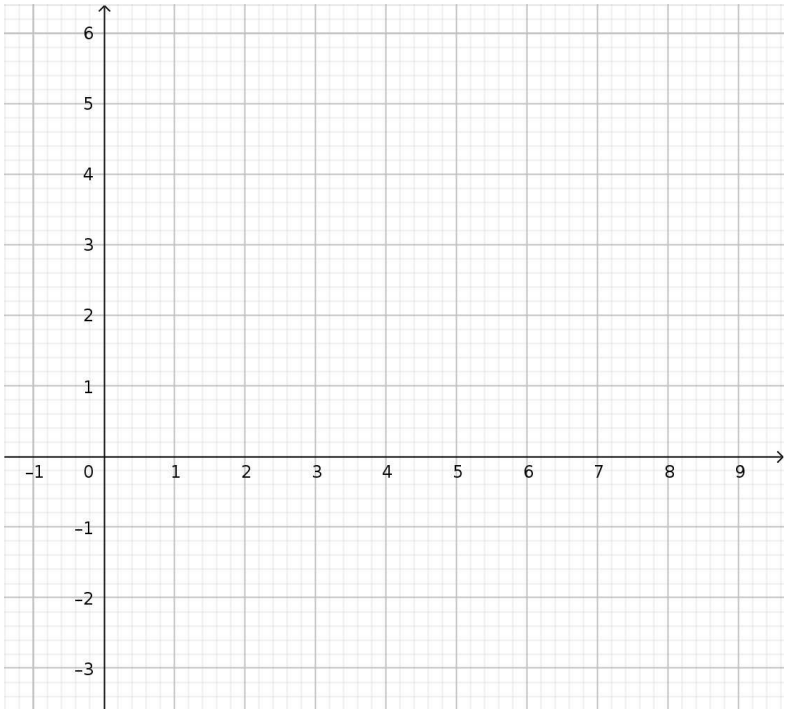


Figura 8: Diagramma (t, a)

Descrivi qui sotto il procedimento utilizzato per costruire il grafico.

1 Geometria per iniziare

Problema 1. Sui lati $AB = AC$ di un triangolo isoscele ABC, riporta due segmenti $AD = AE$. Sia $F = BE \cap CD$.

a) Costruisci la figura;

b) dimostra che il triangolo BCF è isoscele.

Problema 2. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze di centri C e O, tangenti esternamente nel punto A e tangenti alla retta r in $T \in \Gamma_1$ e $Q \in \Gamma_2$. Sia s la tangente in A ad entrambe le circonferenza, sia $M = r \cap s$. Dimostra che:

a) M è il punto medio del segmento TQ;

b) l'angolo $C\widehat{M}O$ è retto;

c) la circonferenza passante per T, A e Q è tangente in A alla retta CO.

2 Aritmetica e combinatorio

Quesito 1. Perché non ha senso scrivere $0.2321\overline{9}$?

Problema 3. Un dado (sei facce) è stato così modificato:

- 3 facce riportano cinque punti;
- 1 faccia riporta sei punti;
- le restanti facce riportano tre punti.

Se lancio 20 volte il dado:

a) qual è la probabilità di ottenere 12 volte 3;

b) qual è la probabilità di ottenere almeno una volta 1.

Problema 4. Siano $m, n \in \mathbb{N}$, facciamo l'ipotesi che $m > n$.

Si procede nel seguente modo:

$$\begin{array}{ll} m \equiv r_1 & (mod\, n) \\ n \equiv r_2 & (mod\, r_1) \\ r_2 \equiv r_3 & (mod\, r_2) \\ \dots & \dots \\ r_{n+1} \equiv 1 & (mod\, r_n) \end{array}$$

Cosa si può dire di n ed m? Motiva la risposta.

3 Algebra

Problema 5. Calcola $gcd(p, q)$ e $lcm(p, q)$:

a) $p = x^2 - 1$ $q = x^3 - 1$;

b) $p = x^3 + x^2 - x + 2$ $q = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$;

c) $p = x^2 + x + 1$ $q = x - 1$.

Problema 6. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

i) $\dfrac{x^2 + 2x}{2} - \dfrac{1}{2}(3x + 1) = \dfrac{1}{4}(1 - x)(2x + 1) + x(x - 1)$;

ii) $\left(\dfrac{x - 2}{2}\right)^2 - \dfrac{x(x + 8)}{4} = \dfrac{4 - x}{3}$

4 Geometria analitica per finire

Problema 7. Ricava l'equazione del luogo r dei punti $P = (x, y)$, equidistanti dagli assi cartesiani.

5 . . . un po' di Python era prevedibile!

Quesito 2. Cosa restituisce questa sequenza di comandi?

```
n = 6
x = 1
for k in range(1,n+1) :
    x *= k
x += 1
```

Motiva la risposta.

6 Se avanza tempo e . . . comunque per casa

Definizione 1. Un numero $n \in \mathbb{N}$ si dice perfetto se la somma dei suoi divisori (escluso il numero stesso) è uguale a n. O, in modo analogo, se la somma dei suoi divisori è $2n$.

6 è perfetto: i divisori di 6 sono $1, 2, 3, 6$, $1 + 2 + 3 = 6$ o $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$.

Teorema 1. *Sia* $2^k - 1$ *un numero primo*[1] *allora* $n = \left(2^k - 1\right) \cdot 2^{k-1}$ *è perfetto.*

Quesito 3. Dimostra il teorema.

[1] detto primo di Mersenne `http://www.mersenne.org/report_milestones/`

7 Geometria per iniziare

Problema 1. Per un punto P di un lato di un rettangolo si conducano le parallele alle diagonali.

Costruisci la figura, e poi dimostra che il parallelogramma limitato da queste parallele e dalle diagonali ha perimetro uguale ad una diagonale.

8 Aritmetica e combinatorio

Quesito 1. Come si ricava che $0.\overline{21} = \dfrac{7}{33}$

Problema 2. Se lancio 10 volte un dado equo ([1]) qual è la probabilità di ottenere esattamente 6 volte 6?

9 Algebra

Problema 3. Calcola $gcd(p, q)$ e $lcm(p, q)$ ([2]):

i) $p = x^4 - 1$, $q = x^3 - 1$;

ii) $p = x^2 + 2x + 4$, $q = x - 2$.

Problema 4. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

i) $\dfrac{5-3x}{4} + \dfrac{5}{3}x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3-5x}{3}$;

ii) $\dfrac{\dfrac{2-x}{3} - \dfrac{3-x}{2}}{1-\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}} + 1.$

10 . . . un po' di Python era prevedibile!

Quesito 2. Cosa restituisce questa sequenza di comandi?

```
prove = 300
for k in range(prove) :
    numero = random.randint(1959,2025)
    if numero < 1965 :
        print(numero)
```

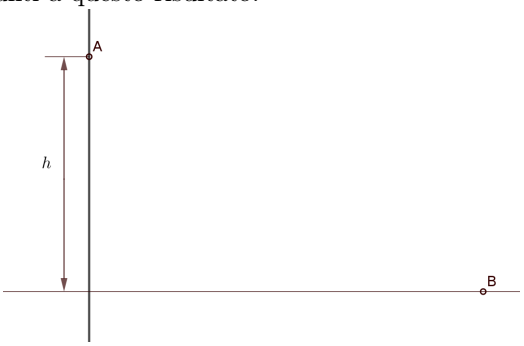
Motiva la risposta.

Quesito 1. Considera la seguente equazione: $x^2 + 6xy + 9y^2 - x + 3y = 0$,

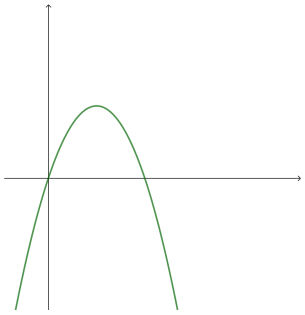
1. spiega perché è l'equazione di una parabola;
2. calcola la direzione dell'asse della parabola.

[1] tutte e sei le facce hanno la stessa probabilità di presentarsi
[2] ricordati che gcd è il massimo comun divisore e lcm il minimo comune multiplo

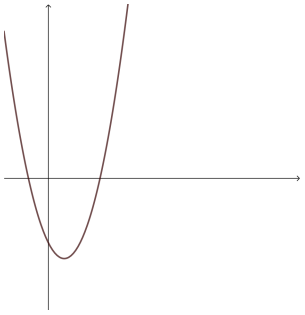
Quesito 2. Abbiamo ricavato che, in condizioni di assenza di attrito, un oggetto che parte dal punto A e arriva nel punto B, avrà in B una velocità, in modulo, pari a $v_B = \sqrt{2gh}$. Descrivi come siamo giunti a questo risultato.



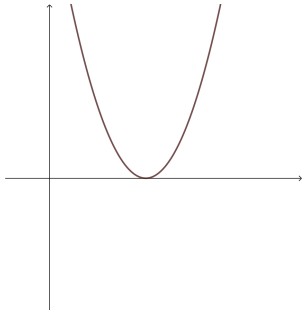
Problema 1. Ad ognuno dei sei grafici corrisponde una sola fra le dieci equazioni. Associa ad ogni grafico la corrispondente equazione motivando la risposta.



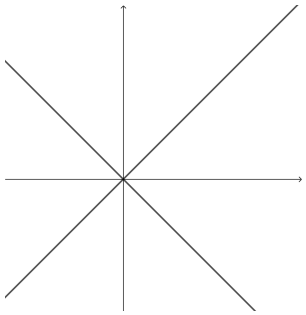
$\mathcal{G}_1$



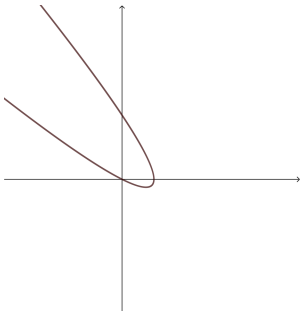
$\mathcal{G}_2$



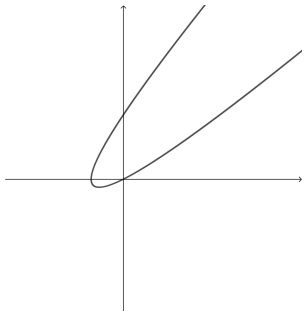
$\mathcal{G}_3$



$\mathcal{G}_4$



$\mathcal{G}_5$



$\mathcal{G}_6$

$\mathcal{F}_a)\ y^2 - x^2 = 0$

$\mathcal{F}_b)\ y^2 - 2x^2 = 1$

$\mathcal{F}_c)\ y^2 - 2xy + x^2 - x - 3y + 1 = 0$

$\mathcal{F}_d)\ y^2 + 2xy + x^2 - x - 2y = 0$

$\mathcal{F}_e)\ y^2 - 2xy + x^2 + x - 2y = 0$

$\mathcal{F}_f)\ y + x^2 - 3x = 0$

$\mathcal{F}_g)\ y - (x-3)^2 = 0$

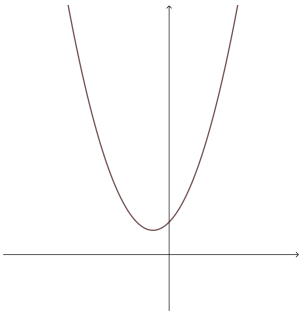
$\mathcal{F}_h)\ y = -(x-3)^2$

$\mathcal{F}_i)\ y - x^2 + 3x = 0$

$\mathcal{F}_j)\ y = -2x^2 + 3$

Vedi 38: $\mathcal{G}_7 \Leftarrow \mathcal{F}_z$ perché $\Delta < 0$ e quindi ...

11 Esempio



$\mathcal{G}_7$ $\mathcal{F}_z$ $y - (x^2 + x + 1) = 0$.

12 Geometria . . . cose già viste

Problema 1. Dimostra che in un triangolo acutangolo ABC il quadrato costruito sul lato BC è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AB e AC meno il doppio del rettangolo di dimensioni AB e la proiezione di AC su AB.
Problema 2. Siano M ed N i punti medi dei lati AC e CB di un triangolo ABC. Dimostra che $MN \parallel AB$

13 Equazioni di secondo grado

Problema 3. Data l'equazione $x^2 - 2(k-1)x + k = 0$, determina, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

i) $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2$; ii) $x_1 + x_2 = 2$; iii) $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$.

Quesito 1. Siano x_1 e x_2 le radici reali dell'equazione $tx^2 + (t+1)x + 1 = 0$ dove $t \neq 0$.
Scrivi x_1, x_2 in funzione di t.

14 . . . non solo parabole

Problema 4. Sia $\mathcal{P}$ la parabola di equazione $y = tx^2 + (t+1)x + 1$:

i) dimostra $\forall t \neq 0$ $\mathcal{P}$ incontra l'asse delle ordinate nello stesso punto A di cui ti è chiesto calcolare le coordinate;

ii) ricava t tale che $B \in \mathcal{P}$, dove $B = (-2, 0)$;

iii) ricava i valori di t per cui il vertice di $\mathcal{P}$ appartiene alla retta r di equazione $y = 2x - 1$

15 Geometria . . . senza numeri

Problema 5. Sia $ABCD$ un parallelogramma, descrivi i passi della costruzione di un quadrato $A'B'C'D'$ equiesteso al parallelogramma $ABCD$.
Problema 6. Sia ABC un triangolo,

i) disegna esternamente al triangolo ABC tre quadrati ACC_1A_1, BAA_2B_2 e CBB_1C_2;([1])

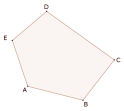
ii) dimostra che i triangoli A_2AA_1, CC_2C_1, BB_2B_1 sono equivalenti (equiestesi) al triangolo ABC.

16 Non solo geometria, però con i numeri

Problema 7. In un torneo di scacchi i partecipanti si affrontano a due a due in tutti i modi possibili, così che ciascuno giochi, una sola volta, contro ciascun altro. Se vengono disputate 28 partite, quanti sono i giocatori?
Problema 8. È dato un triangolo, con i lati di lunghezza 7, 9, 11. Togliere da ciascun lato un segmento x, in modo da ottenere un triangolo rettangolo.
Problema 9. Dato il triangolo equilatero ABC, indica con M il punto medio di BC. Sia $P \in AB$ e $AB = 2$. Quanto deve misurare AP affinché sia: $3 \cdot AP + 3 \cdot PM = 8$

17 E per finire . . . python

Quesito 2. Spiega cosa sono le liste in python.
Quesito 3. Cosa viene scritto compilando queste righe di codice:

[1] ricordati che nei poligoni i vertici si indicano in senso antiorario:  $\underbrace{ABCDE}_{\text{antiorario}}$ non $\underbrace{AEDCB}_{\text{orario}}$

```
listanumeri = []
for k in range(13) :
    listanumeri.append(k-2)
listanumeri.append(2025)
listanumeri[len(listanumeri)-1]
```

18 Spazio vuoto va riempito

18.1 Se avanza tempo e ... comunque per casa

Problema 10. Sia M un punto interno ad un fissato segmento AB. I quadrati $AMCD$ e $MBEF$ sono costruiti nello stesso semipiano individuato dalla retta AB e i segmenti AM e MB sono le rispettive basi. Le circonferenze circoscritte a questi due quadrati, di centri rispettivamente P e Q, si intersecano, oltre che in M, in un altro punto N. Sia N' l'intersezione delle rette AF e BC.

a) Dimostra che N ed N' coincidono;

b) dimostra che, al variare di M su AB, le rette MN passano tutte per un punto S.

19 $\mathcal{M}$ateprob

Problema 1. Considera l'equazione $(k-1)x^2-2(k-2)x+k+1=0 \qquad x \in \mathbb{R}$, determina, se esistono, i valori k per cui:

a) la somma delle radici è $\frac{1}{2}$;

b) il prodotto delle radici è -3.

Problema 2. Un gruppo di persone partecipa ad una gita, il costo complessivo è di 1800 €, ogni partecipante contribuisce con la stessa quota.

Pochi giorni prima della partenza si aggiungono alla comitiva cinque persone, questo comporta che la quota di partecipazione dei componenti iniziali diminuisce di 5 €.

Quante persone vanno in gita?

Problema 3. Sia ABC un triangolo rettangolo in A e H la proiezione di A sulla retta BC. Dimostra che i triangoli ABH e AHC sono simili al triangolo ABC.

Se $2 \cdot BH = HC$, quanto vale il rapporto $\frac{AC}{AB}$?

Problema 4. Dato un triangolo ABC, dimostra che la distanza AH del vertice A dall'ortocentro H è doppia della distanza OM del circo-centro O dal lato BC.

20 $\mathcal{F}$isprob

Problema 5. Una massa puntiforme m viene lanciata con una velocità $\vec{v}$ da un punto O distante d m da una barriere alta h m rispetto al piano orizzontale passante per P. Sapendo che i moduli delle componenti di $\vec{v}$ sono uguali ($v_y = v_x$):

i) ricava che il minimo modulo di $\vec{v}$ che permette a m di superare il muro è $d\sqrt{\frac{g}{d-h}}\ \frac{m}{s}$.

ii) Calcola il modulo della velocità di m nel punto di impatto al suolo (che si trova oltre il muro), nel caso in cui $d = 3$ m e $h = 2$ m.

21 Quesiti $\mathcal{M}$ate

Quesito 1. Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ si ha che:([1])

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$$

.

Quesito 2. Dopo aver dato la definizione di omotetia, costruisci due quadrati omotetici.

22 Quesito $\mathcal{F}$is

Quesito 3. Spiega come abbiamo ricavato che la velocità di una massa m che scivola senza attrito, lungo un piano inclinato, da una fissata altezza h al suolo è indipendente dall'inclinazione del piano.

Possiamo dire la stessa cosa per il tempo impiegato dalla massa per scivolare lungo il piano?

23 ... un pizzico di python

Quesito 4. Se *cg* è una lista, cosa esegue su *cg* il seguente programmino?

```
min = len(cg)
h = min-1
for k in range(0,min-1):
    rNum = random.randint(0,h)
    appC = cg[h]
    cg[h] = cg[rNum]
    cg[rNum] = appC
    h -=1
```

24 Se avanza tempo e ... comunque per casa

Problema 6. Sia ϕ il rapporto aureo([2]), dimostra che $\phi^3 = 2\phi + 1$. Sapresti ricavare in funzione di ϕ, ϕ^n?
Quesito 1. Come si ricava l'equazione della traiettoria di un moto parabolico?

Prima di sviluppare i calcoli, indica il riferimento scelto e le condizioni iniziali.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[1] ricordati che: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

[2] ricordati che ϕ si ottiene risolvendo l'equazione $x^2 - x - 1 = 0$

.....

.....

.....

Quesito 2. Indica, motivando la risposta, quale delle seguenti proposizioni è sempre vera e quale no.

"Se un punto materiale si muove lungo una traiettoria rettilinea allora la sua velocità è costante"

"Se un punto materiale si muove lungo una traiettoria curvilinea allora il suo moto è accelerato"

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Problema 1. Una massa m viene lanciata con velocità $|\vec{v}| = v$, sapendo che $v_x = \frac{v}{2}$:

a) calcola la massima altezza raggiunta da m;

b) se la massa si trova inizialmente ad una altezza h rispetto al suolo, calcola la distanza orizzontale di impatto con il suolo di m e il modulo della velocità $|\vec{v}_{imp}|$ nel punto di impatto.

Problema 2. Per effettuare un servizio, un giocatore di tennis lancia la pallina verticalmente verso l'alto a partire da un punto situato 1.60 m al di sopra del suolo e la colpisce con la sua racchetta quando raggiunge la sommità della sua traiettoria posta a 0.40 m più in alto. Essa parte allora con una velocità v_1 orizzontale e deve passare al di sopra della rete di altezza $h = 0.90\ m$. La distanza del giocatore dalla rete è $d = 12.0\ m$.

a) Con quale velocità v_0 il giocatore lancia la palla verticalmente?

b) Stabilisci l'equazione della traiettoria della pallina dopo l'urto con la racchetta.

c) Quale deve essere il valore di v_1, affinché la pallina passi sulla rete a 0.10 m al di sopra di essa?

d) Qual è, nel momento del passaggio, la direzione del vettore velocità della pallina?

Quesito 1. Come si dimostra che nel moto parabolico, la gittata massima si ottiene quando le componenti della velocità sono uguali.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 2. Un moto in cui la velocità in modulo si mantiene costante è sicuramente uniforme?

Rispondi portando opportuni esempi.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

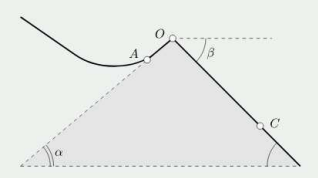
.....

Problema 1. Una massa m viene lanciata con velocità $|\vec{v}| = v$, sapendo che $v_y = \dfrac{v}{2}$:

a) calcola la massima altezza raggiunta da m;

b) se la massa si trova inizialmente ad una altezza h rispetto al suolo, calcola la distanza orizzontale di impatto con il suolo di m e il modulo della velocità $|\vec{v}_{imp}|$ nel punto di impatto.

Problema 2. Uno sciatore percorre una tratto di pista AO, inclinato rispetto all'orizzontale di $\alpha = 40°$, e giunge alla sommità O della risalita con una velocità $v_0 = 12\ \frac{m}{s}$.
Al di là della sommità c'è una discesa inclinata rispetto all'orizzontale di $\beta = -45°$ e lo sciatore compie un salto, ritornando sulla pista in un punto C.



a) Descrivi la traiettoria percorsa dallo sciatore durante il salto;
b) calcola la distanza OC;
c) calcola la durata del salto.
(Trascura la resistenza dell'aria.)

25 Problemi di II grado e non solo

Problema 1. In un trapezio rettangolo la base minore è uguale all'altezza. L'area del trapezio è 22 cm^2, il doppio della base minore supera di un centimetro la base maggiore. Calcola il perimetro del trapezio.([1])
Problema 2. Indica con p la probabilità che ha un tiratore di colpire il bersaglio in un singolo tiro. Quanto vale p se la probabilità di colpire il bersaglio in almeno due tiri successivi è del 91%?

Se la probabilità che ha il tiratore di colpire il bersaglio in un singolo tiro è del 70%, quanto vale la probabilità di colpire quattro volte il bersaglio in otto tiri?
Problema 3. In un sacchetto ci sono 10 palline rosse; quante palline azzurre devo aggiungere affinché la probabilità di estrarre consecutivamente due palline rosse (senza inserimento) sia pari a $\frac{3}{7}$.

26 . . . Parabolando

Problema 4. Sia $\mathcal{P}$ la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$. Costruisci il grafico di $\mathcal{P}$, calcola l'equazione della retta tangente a $\mathcal{P}$ nell'origine ($O = (0, 0)$).

Come si può tracciare, facilmente, la tangente in $A = (4, 0)$?

27 Disequazioni . . . leggere

a) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$; b) $\dfrac{2025}{x^2 - 3x - 4} \geq 0$; c) $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{x^2 - 1}{4} < (x + 1)^2 - \dfrac{1}{2}(2x - 1)^2$ ([2])

28 Geometria

Problema 5. Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, sia CH l'altezza relativa alla base AB. Sia Γ una circonferenza che passa per A e B e incontra rispettivamente in D ed AC AC e in E BC. Detto O il centro della circonferenza Γ dimostra che:([3])

a) $ABED$ è un trapezio isoscele;
b) AE, BD e CH si intersecano nello stesso punto F;
c) $\dfrac{AO}{AF} = \dfrac{CE}{CF}$.

Problema 6. Sia AN la bisettrice relativa all'angolo A del triangolo ABC. Per N si conduca la perpendicolare ad AN e siano D, E, F rispettivamente le sue intersezione con la retta AC, con la retta AB e con la parallela ad AC per B. Dimostra che i triangoli ADE e BEF sono isosceli.

29 python

Quesito 1. Eseguite le seguenti righe di comandi

```
punti = []
for q in range(2,280,2):
    for p in range(1,q):
        if gcd(p,q) == 1:
            a = q**2-p**2
            b = 2*p*q
            c = p**2+q**2
            punti.append([a,b,c])
```

cosa contiene la lista punti?

[1] libro di testo pag. 313 n.866
[2] libro di testo pag. 393 n.204
[3] libro di testo pag. 854 n.278

30 Avrebbe potuto essere problema bonus

Presentato così avrebbe potuto valere $\frac{1}{4}$ di punto.

Invece . . . oggi . . . è: se avanza tempo ma comunque per casa

Problema 7. Sia ABC un triangolo isoscele ($AB = AC$). Dimostra che detto D un punto di BC si ha che:

$$AB^2 = AD^2 + DC \cdot BD$$

Individua, poi, la posizione di D, in modo che detta E, l'intersezione con AB della perpendicolare in D a BC, sia :

$$AD^2 + DE^2 = AB^2$$

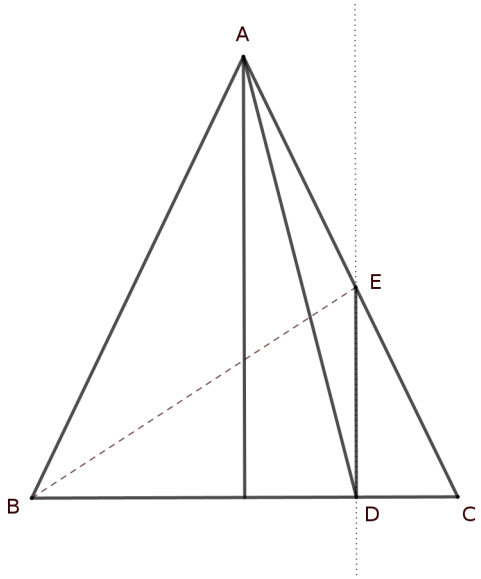


Figura 9: Aiutino

31 Problemi di II grado e non solo

Problema 1. In un trapezio rettangolo la base minore è uguale all'altezza. L'area del trapezio è 22 cm^2, il doppio della base minore supera di un centimetro la base maggiore. Calcola il perimetro del trapezio.
Problema 2. In un sacchetto ci sono 10 palline rosse; quante palline azzurre devo aggiungere affinché la probabilità di estrarre consecutivamente due palline rosse (senza inserimento) sia pari a $\frac{3}{7}$.

32 . . . Parabolando

Problema 3. Sia $\mathcal{P}$ la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$. Costruisci il grafico di $\mathcal{P}$. Verifica che la retta $t : y + 4x - 16 = 0$ è tangente a $\mathcal{P}$.

33 Disequazioni . . . leggere

a) $\dfrac{2025}{x^2 - 3x - 4} \geq 0$;

b) $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{x^2 - 1}{4} < (x + 1)^2 - \dfrac{1}{2}(2x - 1)^2$

34 Geometria

Problema 4. Sia AN la bisettrice relativa all'angolo A del triangolo ABC. Per N si conduca la perpendicolare ad AN e siano D, E, F rispettivamente le sue intersezione con la retta AC, con la retta AB e con la parallela ad AC per B. Dimostra che i triangoli ADE e BEF sono isosceli.

35 python

Quesito 1. Eseguite le seguenti righe di comandi

```
punti = []
for q in range(2,280,2):
    for p in range(1,q):
        if gcd(p,q) == 1:
            a = q**2-p**2
            b = 2*p*q
            c = p**2+q**2
            punti.append([a,b,c])
```

cosa contiene la lista punti?

Chi recupera

obbligatorio **solo** ®

Chi non recupera

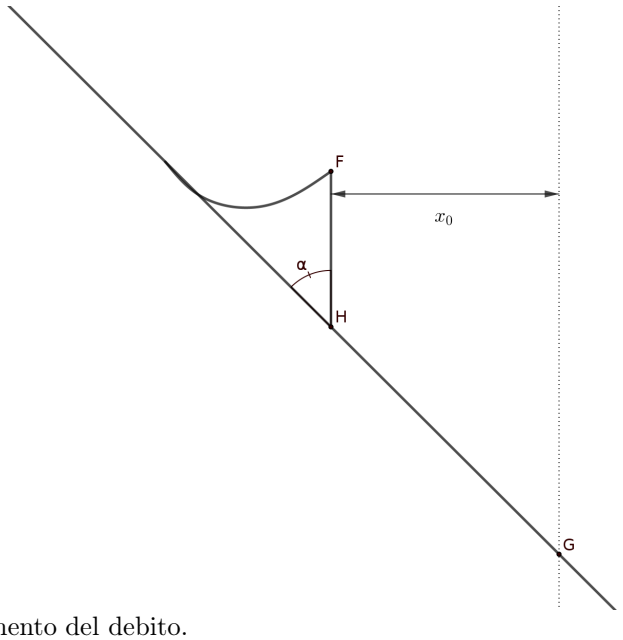
- **solo** ® punteggio **massimo 7**
- **solo** © punteggio **massimo 10**

Quesito 1. ® Dopo aver scritto la legge del moto uniformemente accelerato, rappresenta il diagramma (s,t) della legge, ricava, poi, la legge oraria della velocità.
Quesito 1. © Descrivi il moto circolare uniforme.
Quesito 2. ® In un piano liscio, inclinato di un angolo ϑ rispetto all'orizzontale, è posizionata una massa m. Indica le componenti nella direzione del moto delle forze agenti su m. Scrivi il modulo delle forze.
Quesito 2. © Una pallina di massa m ruota con velocità costante $|\vec{u}|$, su un piano verticale. Nell'istante $t_0 = 0$ il filo, che la trattiene sulla traiettoria circolare, si spezza. Descrivi il moto della pallina in funzione delle posizione in cui si trova nell'istante t_0.
Problema 1. ® Una massa m viene lanciata con velocità $|\vec{v}| = v$, sapendo che $v_y = \dfrac{v}{2}$:

a) calcola la massima altezza raggiunta da m;

b) se la massa si trova inizialmente ad una altezza h rispetto al suolo, calcola la distanza orizzontale di impatto con il suolo di m e il modulo della velocità $|\vec{v}_{imp}|$ nel punto di impatto.

Problema 1. © Un ragazzo su uno snowboard dopo aver disceso un pendio sale lungo un trampolino e atterra ad una distanza orizzontale x_0 dal bordo del trampolino.
Noti x_0, α, FH e l'angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ con cui esce dal trampolino, calcola l'altezza da cui è partito.



® problemi e quesiti che concorrono al superamento del debito.

36 Da sapere assolutamente

Problema 1. ® Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $\dfrac{x^2-2x-7}{x^3-27} \leq 0$; b) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{1}{2-x}$; c) $x^5(x^3-8)(x^2-3x-4) \leq 0$.

Problema 2. ® Siano $A = (-2, 3)$ e $B = (-1, 1)$:

a) calcola l'equazione della retta AB;

b) calcola l'equazione della retta per A perpendicolare ad AB.

Problema 3. ® Calcola i tre lati di un triangolo rettangolo ABC, dati il perimetro $2p = 40$ e la differenza dei due cateti $AC - AB = 7$.

Problema 4. ® Sia ABC un triangolo rettangolo (ipotenusa BC). Detto M il punto medio di BC, dimostra che $AM = MC$.

Problema 5. ® Data in $\mathbb{R}$ l'equazione parametrica: $(k-1)x^2 + 2(k-2)x + k + 1 = 0$, individua, se esistono, i valori di k per cui:

a) l'equazione ammette radici reali; b) la somma delle radici è 5; c) il prodotto delle radici è -2.

Quesito 1. Dimostra che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Quesito 2. ® In un contenitore ci sono 20 palline 10 gialle 7 rosse e le restanti verdi. Se estraggo contemporaneamente 3 palline, qual è la probabilità che:

i) le palline siano di tre colori diversi; ii) le palline siano 2 gialle e una verde; iii) ci sia almeno una pallina verde.

Quesito 3. Quali sono le proprietà di una metrica in $\mathbb{R}^2$?
Come è definita la metrica Taxi?

37 ...e poi ...di tutto un po'

Problema 6. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ detto M il punto medio del lato AD, perpendicolare alle basi, si ha che l'angolo $C\widehat{M}B = \dfrac{\pi}{2}$.

Dimostra che la metà dell'altezza è media proporzionale fra le basi e che la circonferenza di centro M e raggio MA è tangente a BC.

Problema 7. Di un triangolo ABC si sa che $AB = 4$, $BC = 6$ e $CA = 5$. Detto M il punto medio di BC, sia P un punto interno al segmento BM; si poi $A'B'C'$ il triangolo simmetrico di ABC rispetto al punto P.

Determina la misura di PB sapendo che il poligono concavo unione di ABC e $A'B'C'$ ha perimetro 26.

Problema 8. Siano $A = (3, 2)$ e $B = (-1, 0)$.

a) Scrivi l'equazione del luogo $\mathcal{L}$ dei punti P per cui la Taxi-distanza da A è doppia della Taxi-distanza da B;

b) disegna $\mathcal{L}$.

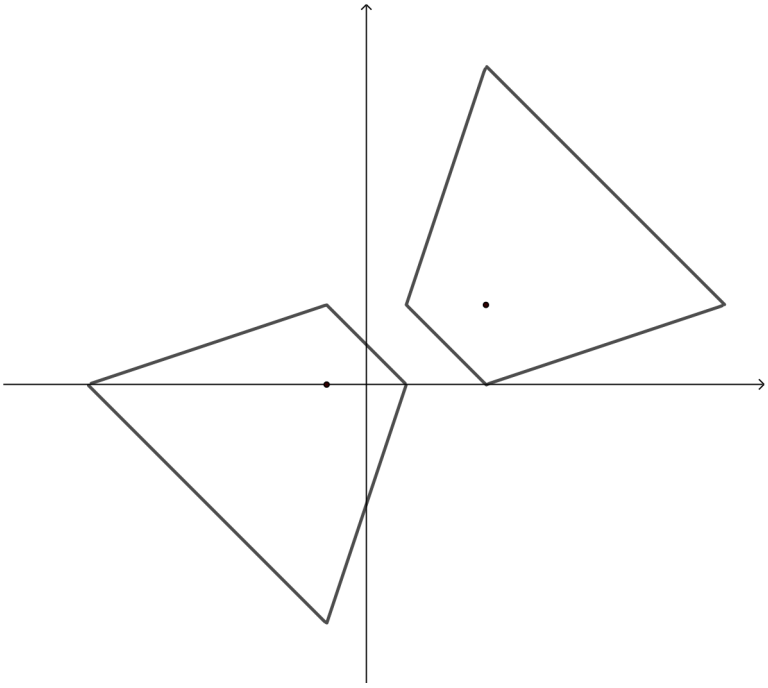
Quesito 4. Come si può scrivere in Python una funzione che permetta di calcolare la Taxi-distanza fra il punto A:

```
A = Array([random.randint(-6,4),random.randint(-4,6)])
```

e la retta r:

```
m = Rational(random.randint(-5,5),random.randint(1,3))
s = random.randint(0,1)
pm = 1
if s == 0 :
    pm = -1
q = random.randint(1,4)*pm
x,y = symbols('x,y', real = True)
r = Eq(y,m*x+q)
```

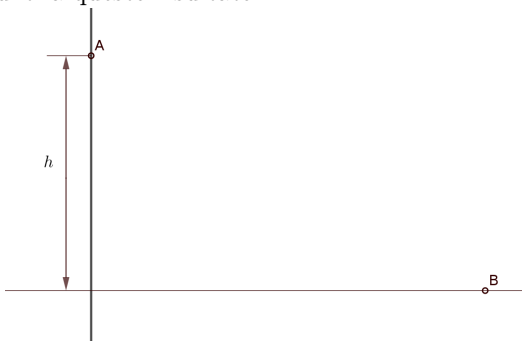
Problema 9. Sia ABC un triangolo isoscele di base BC e $C\widehat{A}B = \frac{2}{3}\pi$. Se la base BC viene divisa in tre parti uguali $CE = ED = DB$. Dimostra che il triangolo ADE è equilatero.



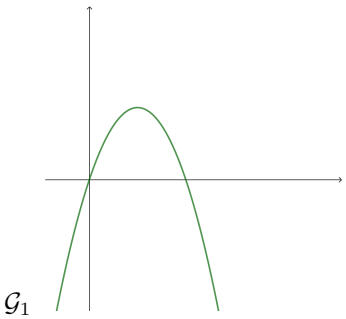
Quesito 1. Considera la seguente equazione: $x^2 + 6xy + 9y^2 - x + 3y = 0$,

1. spiega perché è l'equazione di una parabola;
2. calcola la direzione dell'asse della parabola.

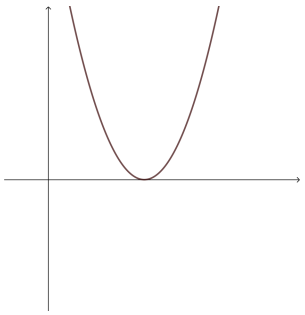
Quesito 2. Abbiamo ricavato che, in condizioni di assenza di attrito, un oggetto che parte dal punto A e arriva nel punto B, avrà in B una velocità, in modulo, pari a $v_B = \sqrt{2gh}$. Descrivi come siamo giunti a questo risultato.



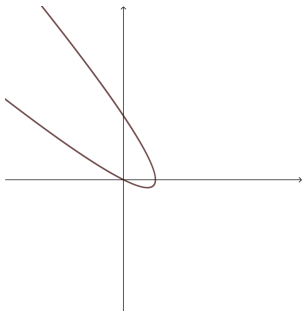
Problema 1. Ad ognuno dei sei grafici corrisponde una sola fra le dieci equazioni. Associa ad ogni grafico la corrispondente equazione motivando la risposta.



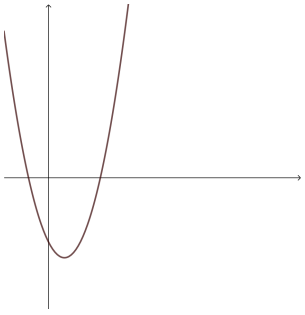
$\mathcal{G}_1$



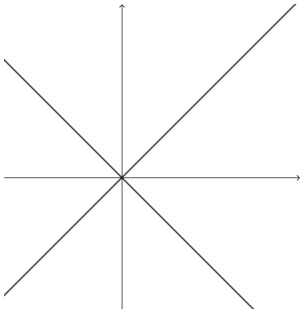
$\mathcal{G}_3$



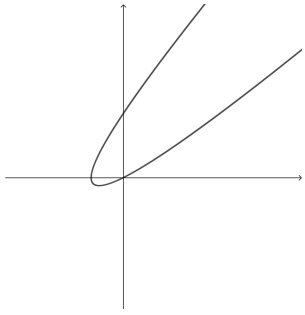
$\mathcal{G}_5$



$\mathcal{G}_2$



$\mathcal{G}_4$



$\mathcal{G}_6$

$\mathcal{F}_a)\ y^2 - x^2 = 0$

$\mathcal{F}_b)\ y^2 - 2x^2 = 1$

$\mathcal{F}_c)\ y^2 - 2xy + x^2 - x - 3y + 1 = 0$

$\mathcal{F}_d)\ y^2 + 2xy + x^2 - x - 2y = 0$

$\mathcal{F}_e)\ y^2 - 2xy + x^2 + x - 2y = 0$

$\mathcal{F}_f)\ y + x^2 - 3x = 0$

$\mathcal{F}_g)\ y - (x-3)^2 = 0$

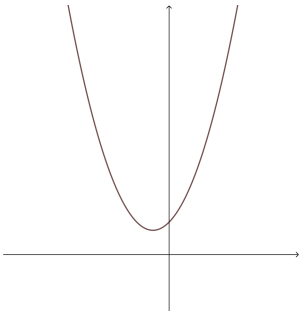
$\mathcal{F}_h)\ y = -(x-3)^2$

$\mathcal{F}_i)\ y - x^2 + 3x = 0$

$\mathcal{F}_j)\ y = -2x^2 + 3$

Vedi 38: $\mathcal{G}_7 \Leftarrow \mathcal{F}_z$ perché $\Delta < 0$ e quindi ...

38 Esempio



$\mathcal{G}_7$ $\mathcal{F}_z$ $y-(x^2+x+1)=0$.

Problema 1. 1) Data l'equazione:

i) $\frac{5(a+x)}{2}a-\frac{4(b+x)}{3}b=5\frac{b}{a}+\frac{6b-4a}{b}$ si verifichi che $2b+3a$ è una soluzione.

ii) $x=2b+3a$ è soluzione $\forall a,b\in\mathbb{Q}$? (*motivare le risposte*)

2) Quale valore si deve attribuire alla lettera b affinché l'equazione: $(x-2b)^2+(bx+1)(x+2)+4x=0$ risulti di primo grado in x?

3) Risolvi in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni:

i) $3\left(x-\frac{1}{4}\right)-4\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{6}(x+1)-\frac{1}{2}(x+3)$

ii) $\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1-6x}{3}=x+\frac{1}{3}(2x+5)$

4) Semplifica le seguenti espressioni:

$$\frac{5x-2+\frac{25x^2+12}{5x+2}}{5\frac{x}{5x-2}-\frac{2}{5x+2}+\frac{25x^2+4}{25x^2-4}}$$

$$\frac{\frac{6b-4a}{a^2-b^2}}{\frac{4a^2+9b^2-12ab}{\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{\frac{3ab-2a^2}{a^3-a^2b}}}}$$

5) Risolvi in $x\in\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

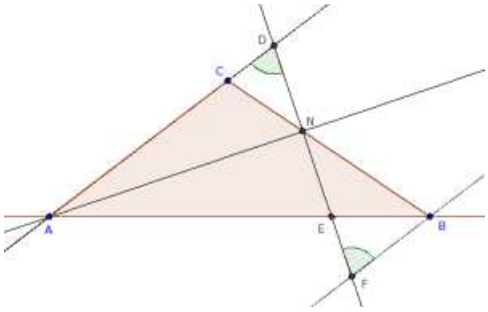
$\frac{16-x^2}{x^2(x+1)}\geq 0$ $\qquad$ $x-3\leq\frac{5}{3-x}$

$\frac{4x^2-x^4}{x(x^2-1)}\geq 0$ $\qquad$ $\frac{27-x^3}{x^2-4x-3}\leq 0$

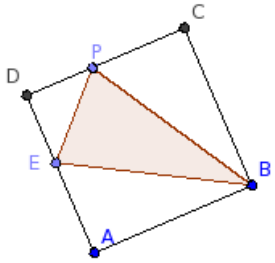
6) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, si determini un punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC. Sia E l'ulteriore intersezione della retta AB con tale circonferenza. Dimostrare che l'angolo CDE è retto.

7) Dato un triangolo ABC, sia D l'intersezione della bisettrice dell'angolo B con la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C. Dimostrare che la circonferenza di centro D e tangente alla retta AC è tangente anche alle rette BA e BC.

8) Sia AN la bisettrice relativa all'angolo A del triangolo ABC. Per N si conduca la perpendicolare ad AN e siano D, E, F rispettivamente le sue intersezioni con AC, con la retta AB e con la parallela ad AC per B. Dimostrare che i triangoli ADE, BEF sono isosceli e che i loro angoli sono a due a due congruenti.



9) Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un triangolo, esso viene scomposto in quattro triangoli fra loro congruenti.



10) Dato il quadrato ABCD sia $\overline{DE} = b$ e $\overline{DA} = a$. Determinare la posizione di P affinché l'area del triangolo PEB sia metà dell'area del quadrato ABCD

Problema 2. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ e discuti rispetto ad $a \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

a) $3\dfrac{x}{3-a} = \dfrac{a-x+2}{3a-a^2} - \dfrac{x}{a}$

b) $\dfrac{3x+a}{a^2-4} + \dfrac{6x}{a-2} = 5\dfrac{x}{a+2}$

2) Trova tre numeri naturali consecutivi sapendo che, aggiungendo al doppio del primo metà del secondo si ottiene il triplo del terzo diminuito di $\dfrac{25}{2}$

3) Un ipermercato ha acquistato lo scorso anno una certa quantità di jeans. Ne ha venduti ogni mese, per i primi quattro mesi dell'anno, il 15%; nei mesi successivi ne ha venduti 140 ogni mese e alla fine dell'anno ha avuto una rimanenza di $\dfrac{2}{19}$ dei jeans acquistati . Quanti erano i jeans in tutto?

4) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $\left(\dfrac{x}{4}+1\right)^2 - \dfrac{x}{2}(x+4) + \dfrac{7x^2}{16} \leq \dfrac{3}{2}(x+4) + 7$

b) $2x + \left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 < x\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{2}$

c) $\dfrac{a-x}{b} - \dfrac{x-b}{a} \geq \dfrac{(a-b)^2}{ab}$ con $a > b > 0$

d) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} \geq \dfrac{a}{b^3} - \dfrac{b}{a^3}$ $a > b > 0$

e) $\dfrac{(x-1)(3-x)}{3+x} \leq 0$

f) $\dfrac{(x-2)(2-x)}{(3+x)(3-x)} \geq 0$

5) Due circonferenze sono secanti nei punti A e B. Dimostrare che, condotti i loro diametri AC e AD, i tre punti C, B, D sono allineati.

6) Sono date due circonferenze di centri C ed O tangenti esternamente nel punto A e tangenti alla retta r nei punti T e Q. Detto M il punto di intersezione della tangente in A con la retta r dimostrare:
   a) che M è il punto medio di TQ
   b) l'angolo $C\hat{M}O$ è retto
7) Dimostra che l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza.
8) Dati un cerchio ed una retta ad esso esterna, qual è l'insieme dei punti che hanno uguale distanza dal cerchio e dalla retta.

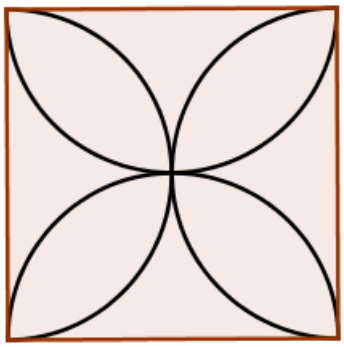
Problema 3. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $\dfrac{16-x^2}{x^2(x+1)} \geq 0$ b) $x-3 \leq \dfrac{5}{3-x}$

2) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi di disequazioni:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{2}{3} < \dfrac{x-1}{6} - 1 \\ 2x-2 > x+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x-5} \leq 0 \\ \dfrac{13}{x} - 5 < 21 \end{cases}$

3) Disegna nel piano cartesiano le seguenti leggi:
   a) $y = \dfrac{|x^2+x|}{x} - x - 3$
   b) $y = \dfrac{|x^2-x|}{x-1} + |x|$
   c) $|y| = |x+1| + |x| + 1$



4) Per ricamare un quadrato con dentro quattro semicirconferenze, (vedi figura) sono disponibili 7.14m di filo colorato.
   a) Quali possibili dimensioni deve avere il quadrato affinché sia realizzabile il ricamo? (utilizzare $\pi = 3.14$)
   b) * Qual è l'area del fiore, nel caso in cui si utilizzi tutto il filo?
5) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, si determini un punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC. Sia E l'ulteriore intersezione della retta AB con tale circonferenza. Dimostrare che l'angolo CDE è retto.
6) Dato un triangolo ABC, sia D l'intersezione della bisettrice dell'angolo B con la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C. Dimostrare che la circonferenza di centro D e tangente alla retta AC è tangente anche alle rette BA e BC.
7) Costruisci nel TaxiPiano il luogo geometrico dei punti P la cui differenza delle distanze dai punti $A = (-2,0) e B = (2,0)$ è pari a 2.

8) Quanti sono gli "anagrammi" distinti della parola JOAOGAS. Se ordiniamo tutti gli "anagrammi" in ordine alfabetico crescente (**A**-B...G...I-**J**...N-**O**...R-**S**...) quale posizione occupa l'anagramma GAASOJO

Problema 4. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

a) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$

b) $3x^2 - 5x + 10 = 0$

c) $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$

2) Determina i valori di $m \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $mx^2 + 2mx + 1 = 0$:

a) ammette una soluzione doppia

b) ammette soluzioni reali distinte

3) Disegna nel piano cartesiano le seguenti leggi:

a) $y = \frac{|x^2 + 2x|}{x} - x$

b) $y = |x - 1| + |x + 1|$

4) Risolvi i seguenti sistemi indicando per quali valori del parametro reale a il sistema ammette soluzioni oppure non ammette soluzioni:

(a) $\begin{cases} ax - ay = -1 \\ x - y = a \end{cases}$

(b) $\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ (a-1)x - ay = a + 1 \end{cases}$

5) Ci sono 5 contenitori indistinguibili: quattro contengono monete eque (mostrano T e C con la stessa probabilità), nel quinto monete truccate (hanno entrambe le facce T). Viene scelto a caso un contenitore, si estrae una moneta, viene lanciata 2 volte. Si ottiene 2 volte testa.

a) Qual è la probabilità che la moneta estratta sia equa?

b) Qual è la probabilità che la moneta estratta sia truccata?

6) Semplifica le seguenti espressioni:

a) $\dfrac{\dfrac{4x}{y^2}}{\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} - \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}}$ dove $x > y > 0$

b) $\sqrt{x^2 a + x^2 b}$ dove $a > 0 \wedge b > 0$

7) In un triangolo equilatero ABC costruisci il baricentro G. Disegna l'asse del segmento AG e l'asse del segmento BG. Dimostra che il lato AB è diviso dai due assi in tre parti congruenti.

8) Traccia una retta r, un suo punto P e un punto A non appartenente ad essa. Indica con H il punto medio del segmento AP. Costruisci l'asse s del segmento AP, che interseca la retta r nel punto M. Sulla retta s determina il punto M', tale che MH=M'H. Qual è il luogo dei punti M' al variare di P su r, fissato A?

9) Dimostra la seguente uguaglianza: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

10) Sia $n \in \mathbb{N}$ dimostra che n^2 è congruo 0 o 1 modulo 4

Problema 5. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{y}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{x^2}{x^2-y^2}$ Sapendo che $4x - y = 6$

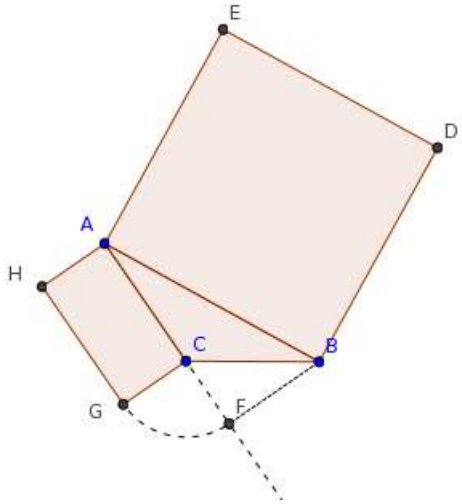
b) $\frac{4}{x} + \frac{6}{y} = 4$ sapendo che $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{2}{10}y = \frac{3}{5}$

2) Risolvi il seguente sistema:

a) $\begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{6} = \sqrt{2} \\ y\sqrt{2} - 3x = \sqrt{3} \end{cases}$

3) Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $kx^2 + 2(k-1)x + 1 + k = 0$:
   a) ammette due soluzioni la cui somma vale -4
   b) ammette due soluzioni il cui prodotto vale $\frac{3}{2}$
4) Disegna nel piano cartesiano la seguente legge:
   a) $f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{1 + x + x^2} - |x + 1|$
5) In un sacchetto ci sono 15 palline rosse e 5 gialle; quante palline gialle occorre aggiungere perché la probabilità di estrarre per due volte consecutive (senza rimettere la palline nel contenitore) una pallina rossa sia $\frac{21}{65}$?
6) Un dado viene lanciato 3 volte.
   a) Qual è la probabilità p di ottenere 6 **almeno** una volta?
   b) Quante volte si deve lanciare il dado perché la probabilità di ottenere 6 **almeno** una volta sia maggiore o uguale al 90%. (*scrivere le formule risolutive senza sviluppare i calcoli*)
7) Dopo aver indicato le condizioni di esistenza, semplifica le seguenti espressioni:
   a) $\sqrt{\frac{y^3 + 4y^2 + 4y}{4b^3 + 12b^2 + 9b}}$
   b) $\sqrt[3]{\frac{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\, a^4}{x^3}}$
8) Dimostra che due corde equidistanti dal centro della circonferenza sono congruenti
9) Dimostrare che le diagonali AE, AC, DF e DB di un esagono regolare ABCDEF, delimitano un rombo.
10) Indica due numeri razionali che:
   a) possano essere scritti nella forma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$
   b) non possano essere scritti nella forma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ (*motiva la risposta, spiegando il procedimento seguito*)
11) Sia $n \in \mathbb{N}$ dimostra che n^4 è congruo 0 o 1 modulo 16

Problema 6. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ e discuti rispetto al parametro $h \in \mathbb{R}$ la seguenti equazione:
   a) $(1-h)x^2 - 2(h+1)x + 1 = 0$
   b) $\frac{2x - k}{x - k + 3} = 1$
2) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$:
   a) $1 + \frac{x}{x+1} + \frac{2x^2 - 4}{4 - x^2} = 0$
   b) $\frac{2x - 1}{2x^2 + x + 1} + \frac{x - 1}{x + 1} = 1$
3) In un trapezio rettangolo la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo. Dimostrare che il quadrato costruito sulla base maggiore è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri tre lati.
4) Dimostrare che il quadrato costruito sul lato maggiore (in figura ABDE) di un triangolo ottusangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati e del doppio del rettangolo avente per dimensioni uno dei lati minori e la proiezione del secondo sulla retta su cui giace il primo (in figura ACGH).



a) Cosa si può dire se il triangolo è acutangolo? (motiva la risposta)

5) Descrivi il luogo geometrico dei punti medi M, delle corde uscenti da un punto P di una fissata circonferenza.

6) Ci sono due contenitori indistinguibili (A e B) ciascuno contenente 50 palline, in A ci sono 30 palline rosse e 20 bianche, in B 10 rosse e 40 bianche.

a) Scelgo a caso un contenitore e estraggo 4 palline:

i) qual è la probabilità di pescare 4 palline bianche?

ii) qual è la probabilità di pescare almeno 1 pallina bianca?

b) se ho estratto 5 palline rosse:

i. qual è la probabilità che il contenitore scelto sia B

7) Disegna la seguente funzione: $y = \dfrac{|x^4 - 4x^2 + x - 4|}{x^2 + 1}$

Problema 7. (risolvere in beata solitudine!!!)

1) **Risolvi in** $\mathbb{R}$

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 3} > 0$

b) $\dfrac{x^4 - 1}{(1 - x)(x^3 - 4x)} \leq 0$

c) $\dfrac{x}{2 - x} + \dfrac{1}{x^2 - 4} < 1$

d) $\sqrt{2x + 11} < x + 4$

2) **Risolvi il seguente problema:**

a) In un triangolo rettangolo con i cateti di $2\sqrt{5}$ *cm* cm $\sqrt{5}$ *cm* inscrivere un rettangolo con un lato sull'ipotenusa e con la diagonale di 2 cm. Calcolare le dimensioni del rettangolo.

3) **Risolvi i seguenti problemi:**

a) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, si determini un punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC. Sia E l'ulteriore intersezione della retta AB con tale circonferenza. Dimostrare che l'angolo CDE è retto.

b) Dato un triangolo ABC, rettangolo in A, si tracci la circonferenza di centro A e tangente all'ipotenusa BC. Da B e C si conducano le ulteriori tangenti alla circonferenza e siano M ed N, rispettivamente, i punti di contatto.

i) Dimostrare che il quadrilatero BCNM è un trapezio rettangolo.

ii) Dimostrare che A è allineato con M ed N.

c) Dato un triangolo ABC, si prolunghi la bisettrice CD fino ad incontrare in E la circonferenza circoscritta. Dimostra che i triangoli ACD, EBD, ECB sono simili.

4) **Risolvi il seguente problema:**

a) Dati i punti A(-2,1) e B(2,-1), trovare le coordinate di C vertice del triangolo ABC di base AB avente area 3

5) **Risolvi il seguente problema:**

a) Dieci urne contengono tutte 4 palline rosse e un numero variabile di palline bianche. Più precisamente l'urna i-esima contiene 4 palline rosse e i bianche. (L'urna 7 contiene 4 rosse e 7 bianche). Viene scelta a caso un'urna:

i) qual è la probabilità che estraendo due palline siano una bianca e una rossa?

Problema 8. 1) **Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni** :

(a) $\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}x-2\right)} < \dfrac{2}{x}$

(b) $\dfrac{x+3}{x-2} > \dfrac{1}{x+3}$

(c) $\dfrac{3x-2}{x} - 4 \leq 0$

(d) $x+2 > \sqrt{x^2-6x}$

2) **Geometria Analitica** :

a) Siano dati nel piano xOy i punti A(-3,1), B(3,-1):

i) calcolare l'equazione della retta per O(0,0) perpendicolare alla retta AB

ii) si determinino le coordinate del punto C, vertice del triangolo isoscele ABC di base AB la cui area vale 10

3) **Geometria Sintetica:**

a) Dato un triangolo isoscele ABC, si prolunghi la base AB dalla parte di B, di un segmento BD tale che $C\hat{D}B = C\hat{B}D - \dfrac{\pi}{2}$. Dimostrare che l'altezza CH è media proporzionale fra HB e HD

b) Dimostrare che inscrivendo in un triangolo rettangolo un quadrato con un lato sull'ipotenusa, questa (l'ipotenusa) rimane divisa in tre parti delle quali una è media proporzionale fra le altre due.

4) **Problemi di secondo grado:**

a) In un rettangolo avente le dimensioni di 6 e 8 si riporta sui lati maggiori, a partire dagli estremi A e C di una diagonale un segmento di lunghezza x e sui lati minori, sempre partendo da A e C, un segmento di lunghezza 2x. Congiungendo gli estremi (distinti da A e C) dei quattro segmenti, si ottiene un quadrilatero. Determinare x in modo che il quadrilatero abbia area 28.

5) **Probabilità e Combinatorio:**

a) Un'urna contiene due palline rosse e quattro nere. Due giocatori A e B giocano nel seguente modo: le palline vengono estratte ad una ad una ee messe da parte. A vince se l'ultima pallina estratta è rossa, altrimenti vince B.

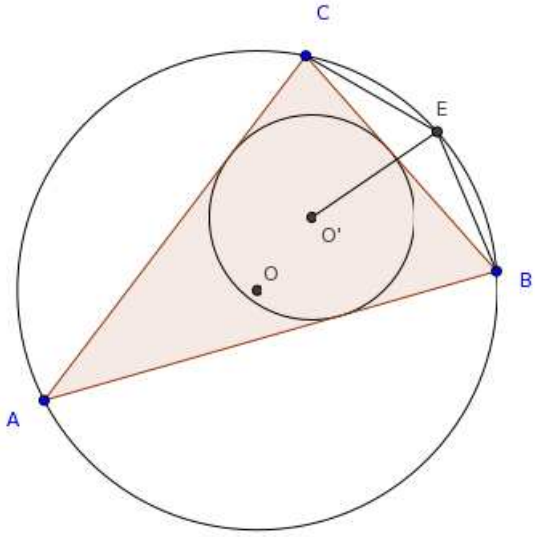
i) Qual è la probabilità che vinca A

ii) Qual è la probabilità che vinca A sapendo che la prima pallina estratta è rossa.

b) Un urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Ne vengono estratte 5 con reimbussolamento, Qual è la probabilità che tra le palline estratte ve ne siano almeno due uguali?

6) **se avanza tempo e ... comunque per casa**

a) Sia ABC un triangolo con O' centro del cerchio inscritto, e sia E il punto medio dell'arco BC (che non contiene A) del cerchio circoscritto ad ABC. Si dimostri che $\overline{EB} = \overline{EO'} = \overline{EC}$



Problema 9. 1) **Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni** :

a) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-x^2} \leq 0$

b) $\sqrt{x^2-5x+4} \geq 2$

c) $\sqrt{x^2-4}+1 < 2x$

d) $\sqrt{x^2-4x} > \dfrac{1}{2}x-6$

2) **Geometria Analitica:**

a) Siano dati nel piano xOy i punti A(-2,1), B(2,-1):

b) determinare le coordinate dei punti C per cui il triangolo ABC è rettangolo in C e isoscele di base AB

3) **Geometria Sintetica:**

a) Si proiettano i quattro vertici di un rettangolo ABCD sulle diagonali di questo. Dimostrare che le quattro proiezioni sono i vertici di un rettangolo simile a quello dato.

b) In una circonferenza è inscritto un triangolo ABC con il lato AB parallelo ad una corda MN (con A ed M dalla stessa parte rispetto all'asse del segmento AB); le rette AB e CN si intersecano in un punto P. Dimostrare che CA:CM=CP:CB

4) **Probabilità e Combinatorio:**

a) Un urna contiene 100 palline numerate nel seguente modo: una pallina con il numero 1, 2 palline con il numero 2, 1 palline con il numero 3, 2 con il numero 4 ...(pari doppie, dispari singole).

i) Qual è la probabilità di estrarre il 100?

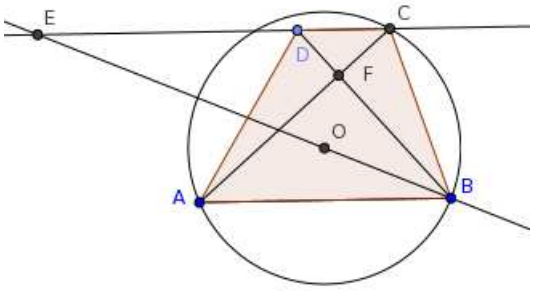
ii) Qual è la probabilità di estrarre il 2?

iii) Ne estraggo contemporaneamente 5.Qual è la probabilità che tra le palline estratte ve ne siano almeno due uguali?

5) **se avanza tempo e ... comunque per casa**

a) Dimostrare che in un trapezio, le diagonali e i prolungamenti dei lati obliqui si incontrano sulla retta che unisce i punti medi delle basi.

b) Sia ABCD un trapezio con base maggiore AB tale che le diagonali AC e BD siano perpendicolari.
Sia O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC e sia E il punto di intersezione tra la retta OB e la retta CD: Dimostrare che $\overline{BC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$



Parte II

39 Attività individuale

39.1 Teoria I

Molti testi di storia della matematica affermano che la geometria ha iniziato a svilupparsi per risolvere problemi di equa spartizione di terreni fertili. Apparentemente, questo è accaduto inizialmente in Egitto ed in Mesopotamia. Il particolare tipo di geometria sviluppatasi è stato fortemente influenzato dal fatto che le regioni da coltivare erano pianeggianti. Ancora oggi, la gran parte della geometria che studiamo a scuola è geometria piana.

Potremmo chiederci che tipo di geometria avremmo avuto se l'ambiente originario fosse stato un ambiente urbano. Probabilmente, non sarebbe stato necessario cambiare gli oggetti elementari sui quali vengono costruiti definizioni e teoremi: punti, rette, piani. Invece è verosimile che il calcolo delle distanze non sarebbe stato effettuato come su un terreno pianeggiante, sul quale è possibile ogni spostamento, in qualsiasi direzione, perché in città non si può passare attraverso le costruzioni.

Se ci muoviamo in automobile in una città disegnata come un accampamento romano, con strade orientate nelle due direzioni cardinali, nord-sud ed est-ovest, gli unici movimenti possibili sono nelle due direzioni NS e EO. Quindi è naturale calcolare le distanze, per tutto ciò che riguarda la gestione dei consumi automobilistici o per i tempi di percorrenza di un tratto urbano, usando un approccio diverso da quello scelto alcuni millenni fa in Egitto.

Per esempio, un conducente di taxi che deve organizzare il proprio lavoro e calcolare tempi e costi troverà più realistico questo calcolo delle distanze di quello euclideo. Giocando con le parole, chiamiamo "taxidistanza" la distanza calcolata muovendosi solo parallelamente alle due direzioni fondamentali. D'ora in poi parleremo di geometria del taxi per descrivere le proprietà relative alla "taxidistanza", e di geometria euclidea per quelle tradizionali.

Gli oggetti fondamentali delle due geometrie sono gli stessi, punti e rette, quindi tutte le proprietà della geometria euclidea relative a questioni di appartenenza o intersezione vengono ereditate senza modifiche dalla geometria del taxi. Invece cambiano, a volte in modo sorprendente, le proprietà dipendenti dalla distanza.

Quando si studia la geometria euclidea nel piano cartesiano (ortogonale) i punti del piano sono determinati da una coppia ordinata di numeri reali. Per esempio in figura 10 è $P = (-2, -1)$ e $Q = (1, 3)$. È intuitivo ciò che si intende per retta PQ; inoltre la distanza tra P e Q è determinata mediante l'applicazione del teorema di Pitagora.([1]) Per la distanza tra P e Q (assunta come unità di misura il lato di un quadratino disegnato in figura 10) scriveremo:

$$d_E(P, Q) = 5$$

(essendo $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{QH}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$) e leggeremo: "la distanza euclidea tra P e Q è 5".

La geometria del taxi presenta alcuni punti di contatto con la geometria euclidea. I punti sono i medesimi, le rette sono le stesse e gli angoli sono misurati nello stesso modo. Solo la "funzione" distanza è diversa. Nella 10

[1] questi semplici concetti sono approfonditi in librappunti cap. 3

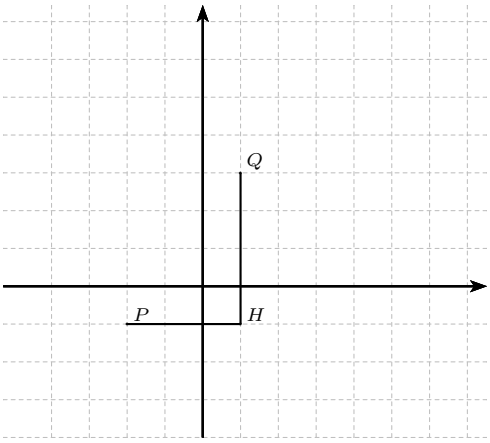


Figura 10

la distanza tra P e Q, $d_T(P,Q)$ è determinata non in linea retta ma come la intenderebbe un tassista (onesto) che vi conducesse da P a Q. Costui conterebbe quanti isolati dovrebbe percorrere orizzontalmente e quanti verticalmente per andare da P a Q (linea continua). Risulta allora

$$d_T(P,Q) = 7$$

e leggeremo "la taxidistanza da P a Q è 7". La figura 11 ci avverte che non sempre i punti del piano sono espressi da coppie di numeri interi.

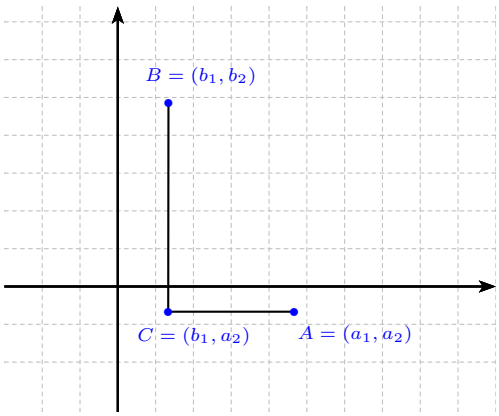


Figura 11

In 10 sono dati $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$. Le coordinate del punto C sono: (b_1, a_2) appare plausibile assumere come taxidistanza:

$$d_T(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

39.2 esercizi

39.2.1) Ricerca $d_T(P_i, Q_i)$ e $d_E(P_i, Q_i)$ delle seguenti coppie di punti:

a) $P_1 = (5,4) \quad Q_1 = (1,2)$;

b) $P_2 = (-4,3) \quad Q_2 = (3,2)$;

c) $P_3 = (-5,-4) \quad Q_3 = (1,2)$;

d) $P_4 = (3,-1) \quad Q_4 = (-2,4)$;

e) $P_5 = (4,-3) \quad Q_5 = (-2,-3)$;

39.2.2) Dati i punti $A = (5,4)$ e $B = (1,2)$, ricava l'equazione del luogo $\mathcal{L}$ dei punti P tali che $d_T(P,A) = d_T(P,B)$.

39.2.3) Disegna $\mathcal{L}$.

39.2.4) Dati il punto $C = (-1, 3)$ e $r = 4$, ricava l'equazione del luogo $\mathcal{C}$ dei punti P tali che $d_T(P, C) = r$.

39.2.5) Disegna $\mathcal{C}$.

Per chi termina prima, può accedere a DB, cartella condivisa, libri, leggi: Gardner-Taxicab-Geometry.pdf

Parte III

40 A gruppi

([2])

40.1 esercizi

40.1.1) a) Se $d_T(A, B) = d_T(C, D)$ allora $d_E(A, B) = d_E(C, D)$?

b) Se $d_E(A, B) = d_E(C, D)$ allora $d_T(A, B) = d_T(C, D)$?

c) Quali sono le condizioni affinché $d_T(A, B) = d_E(A, B)$?

40.1.2) Sia $A = (-2, -1)$, per ciascun punto P sotto indicato si calcoli $d_T(P, A)$.

(a) $P = (1, -1)$ (c) $P = (-2, -4)$ (e) $P = (-1, -3)$ (g) $P = (0, 2)$

(b) $P = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ (d) $P = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$ (f) $P = (0, 0)$ (h) $P = (-2, -2)$

40.1.3) a) Ricerca altri punti aventi taxidistanza 3 da A.

b) Traccia il grafico di tutti i punti P alla distanza 3 da A cioè il grafico dell'insieme $\{P \in \pi \ : \ d_T(P, A) = 3\}$

c) Nella TaxiGeometria quale valore numerico dovrai attribuire a π?

40.1.4) Siano dati i punti $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$; costruisci il grafico dei seguenti insiemi di punti:

a) La taxicirconferenza di centro A e raggio 2.

b) $\{P \in \pi \ : \ d_T(P, A) = 1\}$

c) L'insieme di tutti i punti alla taxidistanza $\frac{3}{2}$ da A.

d) $\left\{P \in \pi \ : \ d_T(P, A) = \frac{5}{2}\right\}$

40.1.5) Dati $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$,

a) Calcola $d_T(A, B)$.

b) Traccia il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P, A) = 3 \ e \ d_T(P, B) = 5\}$.

c) Rappresenta il grafico dell'insieme $\{P \in \pi \ : \ d_T(P, A) = 0 \ e \ d_T(P, B) = 8\}$.

d) Traccia il grafico di $\left\{P \in \pi \ : \ d_T(P, A) = \frac{3}{2} \ e \ d_T(P, B) = \frac{13}{2}\right\}$.

e) Traccia il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P, A) = 4 \ e \ d_T(P, B) = 4\}$.

f) Traccia il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P, A) = 5 \ e \ d_T(P, B) = 3\}$.

[2] ... quanto non svolto costituisce esercizio individuale per casa

g) Costruisci il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P,A) + d_T(P,B) = d_T(A,B)\}$ (utilizzando in questo caso $d_T(A,B) = 8$.

40.1.6) Fissate nel piano cartesiano ciascuna delle coppie di punti A e B, traccia il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P,A) + d_T(P,B) = d_T(A,B)\}$

a) $A = (-2,3) \quad B = (1,-1)$

b) $A = (1,-3) \quad B = (4,0)$

c) $A = (2,1) \quad B = (6,1)$

d) $A = (1,1) \quad B = (1,1)$

40.1.7) Dati $A = (-2,-1)$ e $B = (3,2)$

a) Traccia il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P,A) = 5 \ e \ d_T(P,B) = 5\}$

b) Traccia il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P,A) = 7 \ e \ d_T(P,B) = 7\}$

c) Traccia il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P,A) = 4 \ e \ d_T(P,B) = 4\}$

d) Traccia il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P,A) = d_T(P,B)\}$

40.1.8) Ripeti l'esercizio precedente usando la distanza euclidea al posto della taxidistanza.

40.1.9) Per ciascuna delle seguenti coppie di punti A, B traccia il grafico di $\{P \in \pi \ : \ d_T(P,A) = 2d_T(P,B)\}$

a) $A = (0,0) \quad B = (4,2)$;

b) $A = (0,0) \quad B = (2,4)$;

c) $A = (0,0) \quad B = (3,3)$;

d) $A = (-1,1) \quad B = (4,1)$;

40.1.10) Fissati nel piano i punti $A = (-3,0)$ e $B = (1,2)$, traccia il grafico dei punti $\{P \in \pi \ : \ d_T(P,A) = 2d_T(P,B)\}$.

40.1.11) Ripeti l'esercizio precedente usando la distanza euclidea al posto della taxidistanza.

Parte IV

Lunedì 13 gennaio

41 Attività a gruppi

41.1 Svolgerne uno a testa e poi confrontare

1) $e^{-x} - e^{-3x} \leq 0$
2) $\sin 2x - \cos x \geq 0$
3) $\sqrt{x^2 - x} - x \leq 1$
4) $\log(x+3) - \log(x-3) \leq \log(x-1)$
1) $5^{-x} - 5^{-3x} \leq 0$
2) $\cos 2x - \sin x \geq 0$
3) $\sqrt{x^2 + x} + x \leq 1$
4) $\log(x+4) - \log(x-4) \leq \log(x+2)$
1) $3^{-x} - 5^{x} \leq 0$
2) $\cos^2 x - \sin x \geq 0$
3) $\sqrt{x^2 - 4x} - 2x \leq 2$
4) $\log(x^2-4) - \log(x+4) \leq \log(x)$
1) $9^{x} + 3^{x+1} \leq 4$
2) $\cos^2 x - \sin^2 x \geq \sin x$
3) $\sqrt{5x^2 - 3x} - x \geq 1$
4) $\log(9 - x^2) - \log(x-3) \leq \log(x+3)$
1) $5^{-x} - 3^{x} \leq 0$
2) $\cos^2 x - 2\sin x \geq 0$
3) $\sqrt{4x - x^2} - x \leq 1$
4) $\log(9 - x^2) - \log(x+1) \leq \log(x)$
1) $3^{-2x} - 25^{x} \leq 0$
2) $\cos^2 x + \sin x \geq 0$
3) $\sqrt{x^2 + 4x} + 2x \leq 2$
4) $\log(x^2-1) - \log(x+1) \leq \log(x)$

41.2 esercizi

41.2.1) Si disegni la taxiellisse $\{P \in \pi \ : \ d_T(P,A) + d_T(P,B) = 10\}$ dove $A = (-2,1)$ e $B = (4,1)$.

41.2.2) Alice e Bruno non hanno ancora trovato casa (Alice lavora al $L_A = (-3,-1)$ e Bruno al $L_B = (-3,1)$. Essi hanno deciso che la somma delle distanze da percorrere per andare al lavo-

ro sia minore o uguale a 14 Dove cercheranno casa?

41.2.3) La A.I.C. vuole costruire una fabbrica nella Città Ideale in una località dove la somma delle distanze dalla stazione $S = (-5, -3)$ e dall'aeroporto $A = (5, -1)$ sia di 16. Al fine di un controllo del rumore una ordinanza municipale vieta la costruzione di fabbriche entro 3 unità dalla biblioteca pubblica $B = (-4, 2)$. Dove A.I.C. può costruire?

41.2.4) Si disegnino i punti $A = (-3, -1)$ e $B = (2, 2)$ e si tracci la taxiiperbole

$$\{P \in \pi \ : \ |d_T(P, A) - d_T(P, B)| = 3\}$$

41.2.5) Analizzare la famiglia di taxiiperboli con fuochi in $A = (-3, 1)$ e $B = (5, 1)$.

41.2.6) Analizzare la famiglia di taxiiperboli con fuochi in $A = (0, 0)$ e $B = (4, 4)$.

41.2.7) Alice e Bruno non hanno ancora trovato un appartamento. Il loro ultimo accordo consiste nel fatto che né l'uno né l'altro (per recarsi al lavoro) dovrebbe camminare 4 più dell'altro. Dove cercheranno? (Si ricordi che $L_A = (-3, -1)$ $L_B = (3, 3)$).

Parte V

41.3 Teoria II

41.3.1 Distanza punto retta

Nella geometria euclidea c'è un metodo standard per determinare la distanza di un punto da una retta. Si traccia la perpendicolare r' passante per A alla retta data r; indicato con B il punto di intersezione di r' con r si indica come "distanza del punto A dalla retta r" la distanza tra A e B.

41.3.2 Ripasso

Utilizzando la costruzione precedente, calcola la distanza punto retta nel caso della figura 12. (Calcola la retta perpendicolare, trova le coordinate di B e poi calcola AB.) Verifica la correttezza dei calcoli usando la formula.

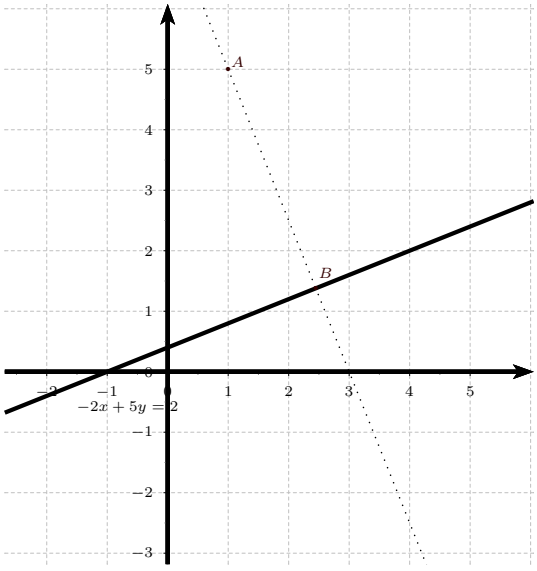


Figura 12

$$d_E(A, r) = d_E(A, B)$$

41.3.3 Primi esercizi

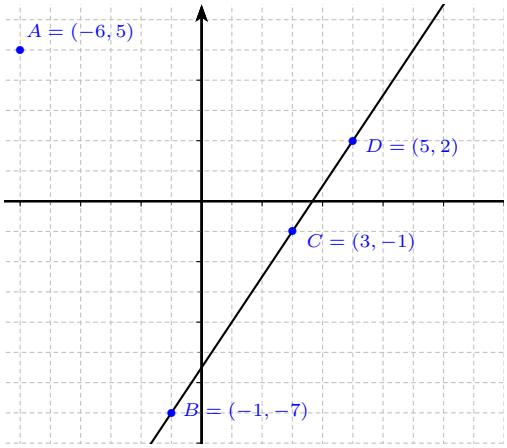


Figura 13

1) Nella figura 13 si consideri il punto A e la retta r.
   a) si trovi $d_T(A, B)$;
   b) si trovi $d_T(A, C)$;
   c) si trovi $d_T(A, D)$;
   d) si trovi un punto E su r che sia il più vicino possibile ad A nella taxigeometria (E è situato sulla perpendicolare per A?);
   e) Si può ragionevolmente concludere che la taxidistanza da A ad r sia uguale a 13.

2) Sia $A = (-3, 2)$ e r la retta passante per $(-6, 8)$ e $(0, 0)$
   a) Si trovi un punto $P \in r$ che sia il più vicino possibile ad A nella taxigeometria.
   b) Si calcoli $d_T(A, r)$.

3) Si ripeta l'esercizio precedente con $A = (-3, 2)$ ed r passante per $(-2, -1)$ e $(2, 3)$

Fin qui si sono considerate delle procedure per trovare la distanza di un punto da una retta nella taxigeometria. Ma non è stata formulata alcuna definizione per la distanza.

Gli esercizi precedenti suggeriscono la seguente definizione di distanza nella taxigeometria

$$d_T(A, r) = \min_{P \in r} d_T(A, P)$$

41.3.4 Suggerimento

Un altro modo operativo per trovare $d_E(A, r)$ è suggerito dalla figura 14

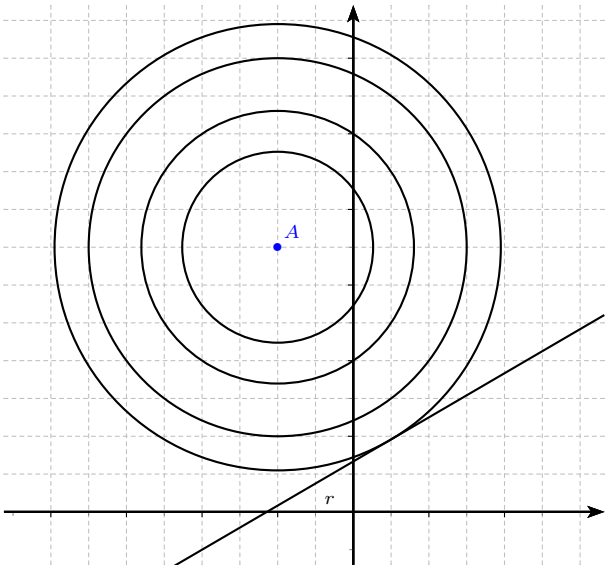


Figura 14

4) Ricava la formula della distanza $d_E(P, r)$([3]) utilizzando il metodo suggerito.

[3] Costruisci una circonferenza di centro P e raggio variabile R, metti a sistema con la retta r ed imponi la condizione di tangenza. Utilizza: $r: \ y = mx + q \ P = (x_0, y_0)$

5) Costruire un metodo per calcolare $d_T(P, r)$.

6) Si ricerchi una retta r per cui $\{P : d_T(P, r) = 2\} = \{P : d_E(P, r) = 2\}$.

Parte VI

41.4 Premessa

Teorema 2. *La taxidistanza $d_T(P, r)$ di $P = (x_0, y_0)$ dalla retta $r : ax + by + c = 0$ è data da:*

$$d_T(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{max\{|a|, |b|\}}$$

Dimostrazione. ... buon lavoro □

41.4.1 Ancora esercizi

7) La figura 15 mostra un punto F e la retta r.
   a) disegna $\{P : d_T(P, r) = 2\}$;
   b) disegna $\{P : d_T(P, F) = 2\}$;
   c) disegna $\{P : d_T(P, r) = 2 \text{ e } d_T(P, F) = 2\}$
   d) disegna $\{P : d_T(P, F) = d_T(P, r)\}$;
   (**attenzione:** svolgere i calcoli non "intuire" i risultati!!)

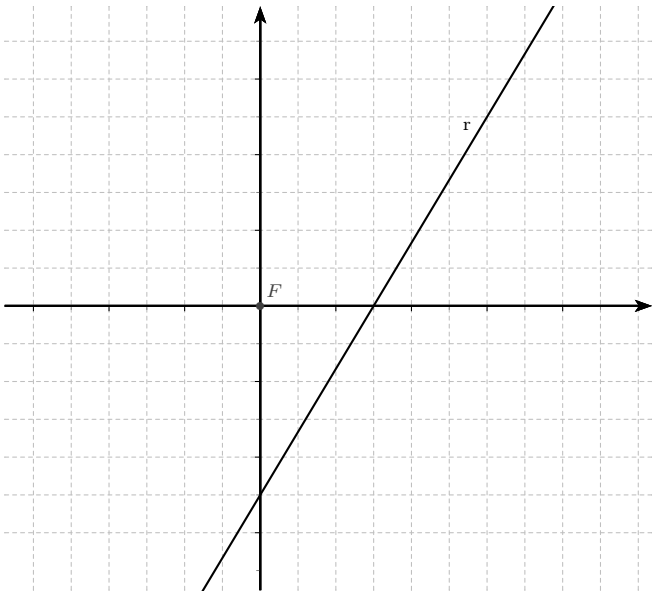


Figura 15

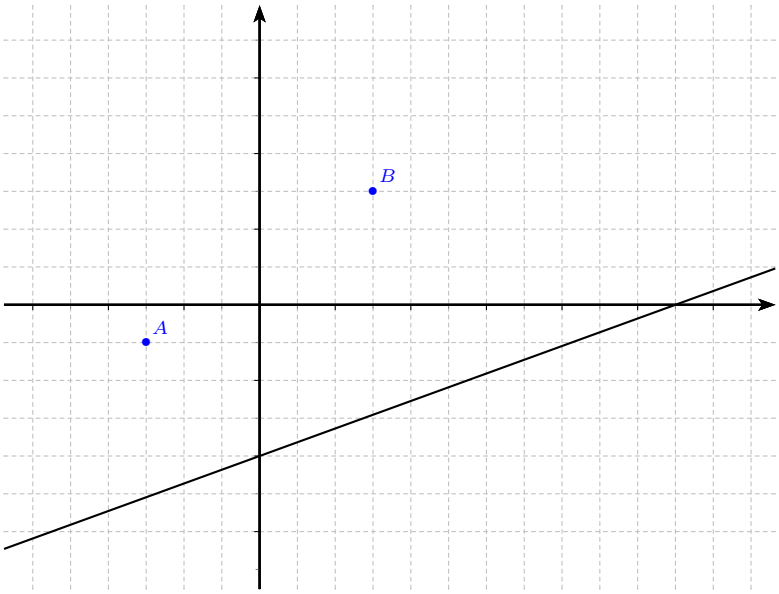
Si dirà TaxiParabola l'insieme dei punti del piano così definito:

$$\{P : d_T(P, F) = d_T(P, r)\}$$

8) Disegna le taxiparabole:
   a) con $F = (-2, 2)$ ed r passante per $(-2, -2)$ e $(2, 2)$;
   b) con $F = (0, 4)$ ed r passante per $(0, 0)$ e $(2, 0)$;

9) Alice lavora come acrobata in $A = (-3, -1)$ ma Bruno ha un nuovo lavoro come autista di un autobus che corre lungo una linea passante per i punti $(3, 1)$ e $(0, 2)$. Uno dei privilegi di Bruno consiste nel fatto che quando torna dal lavoro può parcheggiare l'autobus nel punto più vicino a casa sua. Questo fatto costringe Alice e Bruno ad una nuova ricerca.
   a) Vogliono abitare in un luogo tale che la distanza di Alice dal lavoro più la distanza di Bruno dal suo sia minima. Dove cercheranno?
   b) Poi cambiano propositi e decidono di vivere in un luogo dove entrambi abbiano la stessa distanza per recarsi al lavoro. Dove cercheranno?
   c) Dove cercheranno se Alice vuole una distanza più breve di quella di Bruno per andare al lavoro?
   d) Dove cercheranno se entrambi vogliono essere distanti 6 unità dal loro lavoro?
   e) Dove cercheranno se la somma delle distanze per recarsi al lavoro deve essere al massimo di 6 unità?

10) In ricordo del passato Alice vuole camminare dal parco dei divertimenti sito in $A = (-3, -1)$ al panificio $B = (3, 3)$ ma gradirebbe fermarsi lungo la strada per vedere il treno merci sul binario (vedi figura). Dove si fermerà a guardare il treno se vuole minimizzare il suo cammino?



42 Biblio-Sitografia

- Eugene Krause, Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry (Dover Books on Mathematics)
- Martin Gardner, The Last Recreations: Hydras, Eggs, And Other Mathematical Mystifications

Quesito 1. Nota la legge del moto uniformemente accelerato $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, ricava la legge della velocità $v(t)$.

Quesito 2. Ricava la traiettoria di un oggetto di massa m lanciato con velocità $\vec{v}$ in presenza di gravità.

Quesito 3. Una massa m è tenuta sospesa in equilibrio da due fili, sapendo che l'angolo fra i due fili è $\frac{\pi}{2}$. Disegna le forze in gioco.

Problema 1. Una massa m viene lanciata orizzontalmente con velocità $|\vec{v}|$ ad una distanza d dal punto di lancio di m si trova una massa $2m$. Nell'istante in cui la massa m viene lanciata, la massa $2m$ vien fatta cadere:

a) ricava le equazioni dei moti d m e $2m$;

b) se le due masse si incontrano dopo t_1 secondi, ricava v in funzione di t.

Quesito 1. Dopo aver dato la definizione di quantità di moto, spiega perché $\vec{p}$ si conserva se non agiscono forze esterne.

Fai un esempio in cui la quantità di moto si conserva.

Problema 1. Una massa m in quiete su di un piano orizzontale liscio, viene urtata da una massa M. Sapendo che la massa M dopo l'urto rimane incollata a m e che la velocità delle due masse è u, calcola la velocità di M prima dell'urto.

Quesito 2. Dopo aver dato la definizione di lavoro, **ricava**:

i) il lavoro necessario per comprimere una molla;

ii) il lavoro che permette di far acquisire ad una massa m una velocità v;

iii) il lavoro necessario per sollevare una massa m dal suolo ad una altezza h.

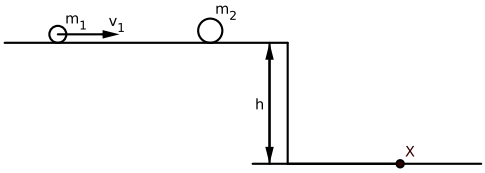


Figura 16: Salto di sferette

Problema 2. Una massa m_1 si muove su di un piano liscio a velocità il cui modulo è v_1 (vedi figura 16), la massa $m_2 = 5m_1$ è in quiete:

a) se le due masse urtano in modo anelastico, dopo aver scelto un opportuno riferimento cartesiano:
   i) calcola le coordinate di X;
   ii) calcola l'energia dispersa nell'urto.

b) se le due masse urtano in modo elastico, dopo aver scelto un opportuno riferimento cartesiano:
   i) calcola le coordinate di X;
   ii) quale delle due masse arriva in X? (motiva la risposta)

43 Disequazioni . . . fondamentali

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

43.1 Razionali fratte

1) $\dfrac{x^3 - x^2}{x^4 - x^2 - 4} \leq 0$;

2) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x-1} \geq \dfrac{x^2}{1-x^2}$.

43.2 Irrazionali

3) $x - 2 \geq \sqrt{x^2 - 3x}$;

4) $\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{5 - x^2}$.

44 Geometria

Problema 1. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ il lato AD è perpendicolare alle basi e le diagonali sono fra loro perpendicolari. Dimostra che l'altezza è media proporzionale fra le basi.

Problema 2. Nel pentagono regolare $ABCDE$ (vedi figura 17), siano M ed N i punti di intersezione della diagonale AC rispettivamente con le diagonali BD e BE. Dimostra che $MC^2 = AM \cdot MN$

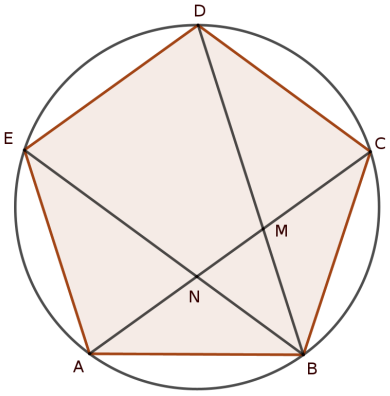


Figura 17

Problema 3. Siano $A = (3, -2)$ e $B = (-1, 1)$, calcola l'equazione della retta r_{AB}[1], ricava l'equazione dell'asse a del segmento AB, determina l'equazione della retta s parallela a r_{AB} passante per il punto di $C \in a$ di ordinata 5, calcola l'area del triangolo ABC.

45 Problemi di II grado

Svolgere i seguenti problemi impostando le opportune equazioni e poi risolverle. Se il risultato viene trovato per tentativi non viene considerato.

45.1 Non svolti

Problema 4. In un rettangolo, se si aumenta di 2 metri la base e si riduce di un metro l'altezza, la sua area aumenta di 4 metri quadrati. Se invece si riduce di un metro la base e si aumenta di 2 metri l'altezza, l'area aumenta di 22 metri quadrati. Quali sono le dimensioni del rettangolo?

[1] retta per A e B

Problema 5. Luca e Carlo bevono due aranciate in bottiglia. Nel tempo in cui Luca beve 11 sorsi, Carlo ne beve 8, ma due sorsi di Carlo equivalgono a tre di Luca. Poiché quando Carlo inizia a bere Luca ha già preso 4 sorsi, dopo quanti sorsi di Carlo le due bibite hanno lo stesso livello?

45.2 Probabilità e combinatorio

Problema 6. Dopo aver posto le opportune condizioni, risolvi:

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2}$$

dove $n \in \mathbb{N}$.

Problema 7. Facendo molte prove, si scopre che se un dado a sei facce viene lanciato sei volte, la probabilità di ottenere tre volte la faccia con cinque punti è $\frac{256}{3125}$. Qual è la probabilità di ottenere 5 in un solo lancio?

46 ...

Problema 8. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema: $\begin{cases} |4x - x^2| = y \\ y = x + k \end{cases}$, ammette tre soluzioni distinte.([2])

Problema 9. Disegna, motivando la costruzione, l'insieme dei punti P, tali che $d_{Taxi}(P, A) + d_{Taxi}(P, B) = d_{Taxi}(A, B)$, essendo $A = (-1, 1)$ e $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

47 Ma ... c'è ancora spazio

Problema 10.

(a) Find all positive integers n for which $2^n - 1$ is divisible by 7.

(b) Prove that there is no positive integer n for which $2^n + 1$ is divisible by 7.

1) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} \geq \frac{3}{x^2+x-2}$

2) $\frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-2} < \frac{2}{x^2+x-6}$

3) $\frac{2}{x-4} + \frac{1}{x+1} \leq \frac{3}{x^2-3x-4}$

4) $\frac{4}{x+5} - \frac{2}{x-1} \geq \frac{2}{x^2+4x-5}$

5) $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+3} > \frac{4}{x^2+x-6}$

6) $\frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4} \leq \frac{3}{x^2-3x-4}$

7) $\frac{2}{x-6} + \frac{3}{x+2} \geq \frac{5}{x^2-4x-12}$

8) $\frac{1}{x+7} - \frac{2}{x-3} < \frac{1}{x^2+4x-21}$

9) $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+5} \leq \frac{4}{x^2+4x-5}$

10) $\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-3} \geq \frac{3}{x^2-x-6}$

11) $\frac{2}{x-7} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x^2-6x-7}$

[2] **Aiutino**: costruisci i grafici

12) $\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-2} \leq \frac{1}{x^2+2x-8}$

13) $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+6} \geq \frac{3}{x^2+3x-18}$

14) $\frac{5}{x+8} - \frac{1}{x-5} < \frac{4}{x^2+3x-40}$

15) $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+4} \leq \frac{5}{x^2+2x-8}$

16) $\frac{4}{x+1} - \frac{1}{x-6} \geq \frac{3}{x^2-5x-6}$

17) $\frac{1}{x-5} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x^2-2x-15}$

18) $\frac{3}{x+4} - \frac{1}{x-1} \leq \frac{2}{x^2+3x-4}$

19) $\frac{2}{x-8} + \frac{1}{x+2} \geq \frac{3}{x^2-6x-16}$

20) $\frac{1}{x+6} - \frac{2}{x-4} < \frac{1}{x^2+2x-24}$

21) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+5} \leq \frac{5}{x^2+4x-5}$

22) $\frac{1}{x+3} - \frac{3}{x-7} \geq \frac{2}{x^2-4x-21}$

23) $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+4} > \frac{5}{x^2+2x-8}$

24) $\frac{4}{x+7} - \frac{1}{x-2} \leq \frac{3}{x^2+5x-14}$

25) $\frac{1}{x-6} + \frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x^2-5x-6}$

26) $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-3} < \frac{1}{x^2-x-6}$

27) $\frac{2}{x-4} + \frac{1}{x+3} \leq \frac{3}{x^2-x-12}$

28) $\frac{1}{x+5} - \frac{3}{x-1} \geq \frac{2}{x^2+4x-5}$

29) $\frac{2}{x-7} + \frac{1}{x+2} > \frac{3}{x^2-5x-14}$

30) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-6} \leq \frac{1}{x^2-5x-6}$

1) $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} \geq \frac{4}{x^2-4}$

2) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} < \frac{2}{x^2-1}$

3) $\frac{x}{x-3} + \frac{1}{x+3} > \frac{6}{x^2-9}$

4) $\frac{2}{x-5} - \frac{10}{x^2-25} \leq \frac{1}{x+5}$

5) $\frac{4}{x^2-16} + \frac{1}{x-4} > \frac{1}{x+4}$

6) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \geq \frac{8}{x^2-4}$

7) $\frac{5}{x+6}+\frac{1}{x-3}>\frac{6}{x^2+3x-18}$

8) $\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x+1}\leq\frac{x^2+3}{x^2-1}$

9) $\frac{2x}{x+4}-\frac{1}{x-4}<\frac{x^2-20}{x^2-16}$

10) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2-x}\geq\frac{1}{x-1}$

11) $\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x^2-6x+9}\leq\frac{x-1}{(x-3)^2}$

12) $\frac{x}{x^2-4x+4}-\frac{1}{x-2}>\frac{2}{x^2-4}$

13) $\frac{2}{x^2+2x+1}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{x+3}{x^2-1}$

14) $\frac{3}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x-2}<\frac{1}{x-3}$

15) $\frac{x}{x^2-x-2}-\frac{1}{x-2}\leq\frac{1}{x+1}$

16) $\frac{2}{x^2+3x+2}+\frac{x}{x+1}>\frac{x-1}{x+2}$

17) $\frac{4}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+x}\geq\frac{1}{x}$

18) $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-4x+3}<\frac{2}{x^2-5x+6}$

19) $\frac{x+1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\leq\frac{2x}{x^2+2x}$

20) $\frac{3}{x^2+x-12}+\frac{1}{x+4}>\frac{1}{x-3}$

21) $\frac{x^2+x+1}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\geq 0$

22) $\frac{1}{x+2}+\frac{x-2}{x^2-2x+4}<\frac{8}{x^3+8}$

23) $\frac{x^2}{x^3-x^2+x-1}\leq\frac{1}{x-1}$

24) $\frac{3}{x^3-1}+\frac{1}{x^2+x+1}>\frac{1}{x-1}$

25) $\frac{2x-2}{x^2-2x+1}-\frac{x}{x^3-1}\geq\frac{1}{x^2+x+1}$

26) $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^3-8}<\frac{x}{x-2}$

27) $\frac{x+3}{x^2-3x+2}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\geq\frac{1}{x-2}$

28) $\frac{x^2-2}{x^3-3x^2+3x-1}\leq\frac{1}{(x-1)^2}$

29) $\frac{4}{x^2-9}+\frac{x}{x^3+27}>\frac{1}{x+3}$

30) $\frac{x^2+2}{x^4-16}-\frac{1}{x^2-4}\leq\frac{1}{x^2+4}$

48 Ricordi quando svolto in classe o assegnato per casa?

Quesito 1. In un triangolo siano K l'ortocentro, G il baricentro e O il circocentro, spiega cosa si utilizza per dimostrare che $GK = 2OG$.([1])
Quesito 2. Quando un poligono di enne lati (n-agono) è regolare?
Quesito 3. Come si dimostra l'esistenza dell'elemento neutro nel prodotto riga per colonna nell'insieme $\mathcal{M}_2$?([2])
Quesito 4. $\exists\, A \in \mathcal{M}_2$ che non ammette inversa con l'operazione prodotto riga colonna? Motiva la risposta.

repetita iuvant

Quesito 5. Enuncia e dimostra il teorema della secante e della tangente.

49 Problemi e quesiti in libertà

Problema 1. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

1) $1 + \dfrac{9}{4x-12} < \dfrac{3x-10}{x^2-2x-3} + \dfrac{1}{4x+4}$

2) $\dfrac{x^3(x+1)^2}{x+3} \geq 0$

3) $\sqrt{5-2t} \geq 6t-1$

4) $\sqrt{\dfrac{x^2+8x+9}{1-x^2}} \geq x-3$

Problema 2. In un triangolo rettangolo un cateto supera l'altro di 17 ed il perimetro è 56. Calcola l'ipotenusa.
Problema 3. Dato un rettangolo $ABCD$ prolunga il lato AB dalla parte di A, di un segmento $AE = AD$, costruisci, nello stesso semipiano che contiene $ABCD$, il quadrato di lato EB, costruisci, ora il quadrato $\mathcal{Q}$ di lato AC avente B come punto interno. Calcola le dimensioni di $ABCD$ sapendo che $Area_{\mathcal{Q}} = 218$ e la differenza fra l'area del quadrato di lato EB e l'area di $ABCD$ è 309.
Quesito 6. Se il 20 % dei bulloni prodotti da una certa macchina è difettoso, determina la probabilità che, su 4 bulloni scelti a caso

a) uno sia difettoso; b) zero siano difettosi; c) al massimo 2 siano difettosi.

Problema 4. Siano $A = (-2, 0)$, $B = (2, 0)$ e $C = (0, 4)$.

a) Mostra che il triangolo $\mathcal{T} = ABC$ è isoscele;

b) calcola le coordinate del baricentro e dell'ortocentro di $\mathcal{T}$;

c) scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta a $\mathcal{T}$;

d) calcola l'equazione della parabola di vertice C che passa per A e B.

50 . . . qui si pensa un po' di più

Problema 5. Dato il triangolo ABC non rettangolo, traccia la circonferenza di diametro BC che incontra ulteriormente le rette AB, AC rispettivamente in M ed N. Dimostra che $ABC \sim ANM$.
Problema 6. La disequazione $\sqrt{\dfrac{h(x)+2}{h(x)+1}} \leq h(x) - 2$ ha soluzione $\forall x \in \mathbb{R}$.

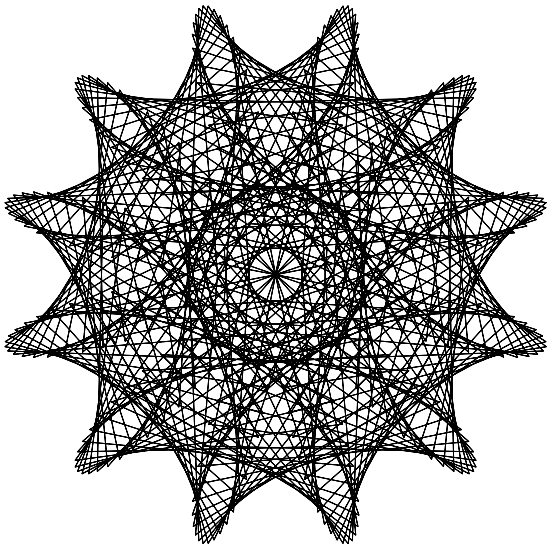
Proponi una possibile legge di h([3])
Problema 7. Nel piano π è dato il quadrato di diagonale $A = (0, 0)$ $C = (1, 1)$ applicando la trasformazione lineare $\tau : \pi \to \pi$ diventa il rettangolo di coordinate $A' = (0, 0)$, $B' = (4, 0)$, $C' = \left(4, \dfrac{1}{3}\right)$ e $D' = \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.

Scrivi la trasformazione τ.

[1] Non è chiesta la dimostrazione. Indica ciò che si usa per ottenere il risultato.
[2] $\mathcal{M}_2$ è l'insieme di tutte le matrici quadrate 2×2
[3] Dovresti ricordarti che una funzione è definita da un dominio un codominio e una legge, ad esempio: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ dove $[a, b]$ è il dominio, $\mathbb{R}$ il codominio e $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ la legge.

51 Oggi niente python ma ...

Ti propongo un disegnetto:



Come sarà fatto? Chissà se l'AI lo sa?
Quesito 1. Come si ricava la matrice inversa nel prodotto riga per colonna nell'insieme $\mathcal{M}_2$?([1])
Quesito 2. La retta di Eulero, come è definita?
Quesito 3. Enuncia e dimostra il teorema delle due secanti.
Problema 1. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

1) $\dfrac{x^4+x^2-600}{16-x^2} \leq 0$; 2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2} > 1$; 3) $\sqrt{25-x^2} \geq x-3$.

Problema 2. Determinare un punto M dell'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio r, in modo che AM sia uguale alla distanza di M dalla retta OB.
Problema 3. Dato un triangolo ABC, per un punto D del lato AB conduci i segmenti DM e DN paralleli, rispettivamente ai lati BC e AC, con M su AC e N su BC. Dimostra che:

$$\frac{DM}{BC}+\frac{DN}{AC} = \text{costante}$$

Problema 4. La macchina A produce led e lo 0.5% sono difettosi, determina la probabilità che, su 10 led scelti a caso al massimo 3 siano difettosi.

Anche la macchina B produce led in qui lo 0.15% è difettoso.

Scelti a caso 20 led prodotti da una delle due macchine, si ricava che solo 3 sono difettosi. Qual è la probabilità che la macchina che ha prodotto i led sia la A?
Problema 5. Siano $A=(-4,0)$, $B=(0,2)$:

a) calcola l'equazione della retta AB;

b) ricava le coordinate del punto C in modo che il triangolo BAC sia rettangolo in A e il punto medio dell'ipotenusa BC sia $M=(0,-3)$.

[1] $\mathcal{M}_2$ è l'insieme di tutte le matrici quadrate 2×2

c) scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta ad ABC.

52 $\mathcal{M}$ate problemi

Problema 1. In un trapezio la differenza delle basi è 6 cm; l'altezza è doppia della base minore e l'area è di 56 cm^2. Determina la misura delle due basi del trapezio.
Problema 2. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

1) $\dfrac{x^4-4x^2-5}{4-x^2}<0$

2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\leq 3$;

3) $\sqrt{x^2-3x-4}\geq x-5$;

4) $\dfrac{x^3-8x}{x-\sqrt{x-2}}\leq 0$

Problema 3. Se lancio sei volte un dado così costruito: 3 facce hanno sei punti, una faccia cinque punti e le restanti due hanno quattro punti.

1) qual è la probabilità di ottenere esattamente tre volte sei;

2) qual è la probabilità di ottenere esattamente un sei e cinque quattro.
Problema 4. Scrivi l'equazione della retta r parallela alla retta di equazione $y-x+2=0$ che passa per l'origine $O=(0,0)$.
Problema 5. Dimostra che se due circonferenze si tagliano in A, B, le tangenti condotte ad esse da un qualunque punto P della retta AB sono uguali.
Quesito 3. Enuncia e dimostra il teorema della secante e della tangente.

53 $\mathcal{F}$is problemi

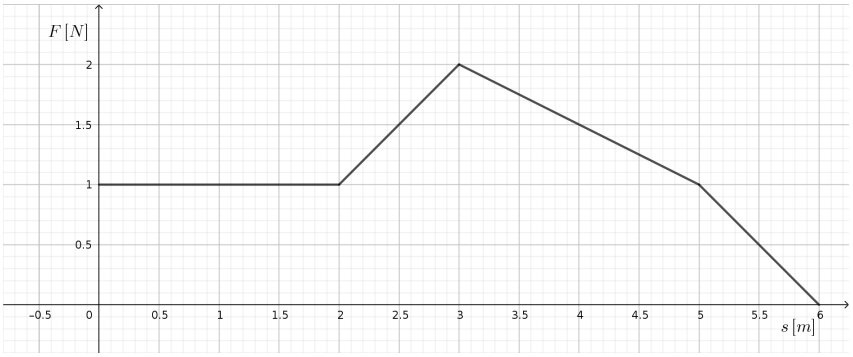
Problema 6. Una massa M, inizialmente in quiete, viene accelerata in modo costante per t_1 secondi, calcola l'accelerazione sapendo che lo spazio percorso nei t_1 secondi è s_0.

Chiama ora v_1 la velocità di M nell'istante t_1, in questo istante M urta una massa $m=\dfrac{M}{5}$, le due masse si incollano, calcola la velocità delle due masse in un istante successivo a t_1.

54 $\mathcal{M}$ate$\mathcal{F}$is quesiti

Quesito 1. Perché possiamo supporre che $\vec{p}$ (quantità di moto) si conserva negli urti anche se agiscono forze esterne?

Quesito 2. In figura è rappresentato l'andamento della forza $\vec{F}$ in funzione dello spostamento. Calcola, spiegando il procedimento usato, il lavoro svolto da $\vec{F}$ su un punto materiale che si è mosso nell'intervallo $[0,6]$.



Quesito 4. Sia $f(x)\leq -1\ \forall x\in\mathbb{R}$

i) Spiega perché la seguente disequazione, $\sqrt{1+(f(x))^2}\geq f(x)+1$, è verificata per ogni $x\in\mathbb{R}$.

ii) Risolvi: $\sqrt{f(x)-1}\leq x^{2026}$.

Quesito 5. Applicando la trasformazione $\tau:\begin{cases}\alpha=a_{11}x+a_{12}y\\ \beta=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}$ al triangolo ABC si ottiene un triangolo $A'B'C'$ la cui area è due volte quella del triangolo ABC.

Proponi, una possibile matrice di trasformazione. Motiva la risposta.

Problema 7. In figura 18 è riportata una curva $\mathcal{E}$ di equazione $y^2 - \frac{16}{25}\left(x^2 - 6x + 9\right) = 16$ e la sua trasformata $\tau(\mathcal{E})$. La trasformazione τ è "regolata" dalla matrice $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$

a) proponi dei valori possibili per $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}$.
b) scrivi la possibile equazione della curva $\tau(\mathcal{E})$.

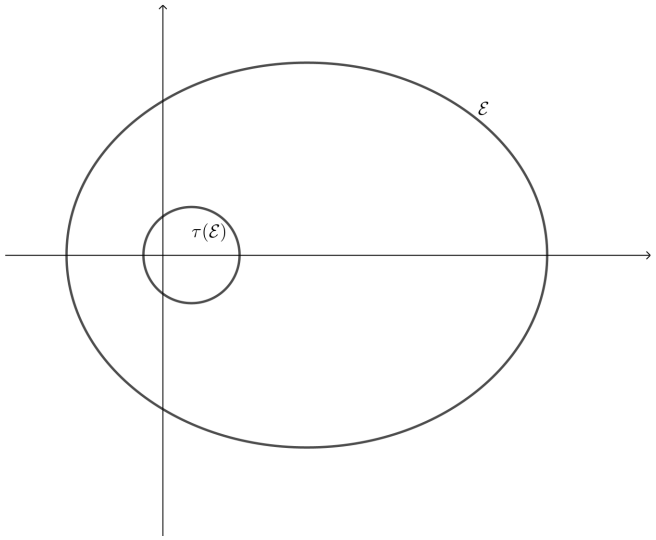


Figura 18

Dimenticavo Python

Quesito 6. Cosa calcolano queste righe di codice?

```
n = 46
conta = 0
quaterna = []
for a in range(n) :
    for b in range(n-a) :
        for c in range(n-a-b) :
            d = n-a-b-c
            quaterna.append([a,b,c,d])
            conta += 1
conta, binomial(48,3)
```

1) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-3}{x+4} > 0$
2) $\frac{2x-5}{x+1} - \frac{x+3}{x-2} \leq 0$
3) $\frac{x}{x+2} + \frac{3}{x-1} \geq \frac{5}{x+2}$
4) $\frac{4x-1}{2x+3} - \frac{2x+5}{x-1} < 0$
5) $\frac{x+2}{x-3} + \frac{x-4}{x+1} \geq \frac{2x}{x+1}$
6) $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-3}{x+5} > 0$
7) $\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-4} \leq \frac{3}{x+3}$
8) $\frac{5x-2}{3x+1} - \frac{x+4}{2x-3} \geq 0$
9) $\frac{x+1}{x-4} + \frac{x-2}{x+5} < \frac{3x}{x-4}$
10) $\frac{2x-7}{x+2} - \frac{x+1}{x-6} \leq 0$
11) $\frac{x^2+1}{x-3} + \frac{x-4}{x+2} > 0$
12) $\frac{2x^2-3x+1}{x+1} - \frac{x^2+2}{x-4} \leq 0$
13) $\frac{x^2-5x+6}{x-2} + \frac{x+1}{x+3} \geq 0$
14) $\frac{3x^2-2x+4}{2x+5} - \frac{x^2+1}{x-1} < 0$

15) $\frac{x^2-4}{x+1}+\frac{x-3}{x-2}\geq\frac{2x}{x+1}$

16) $\frac{x^2+3x+2}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+5}>0$

17) $\frac{2x^2-5x+3}{x+2}+\frac{x+4}{x-3}\leq 0$

18) $\frac{x^2-9}{x+1}-\frac{x^2-4}{x-1}\geq 0$

19) $\frac{x^2+2x-3}{x-5}+\frac{x-1}{x+2}<0$

20) $\frac{3x^2-7x+2}{x+3}-\frac{x^2+5}{x-2}\leq 0$

21) $\frac{x^3-1}{x-2}+\frac{x^2+2}{x+3}>0$

22) $\frac{2x^3-3x^2+1}{x+1}-\frac{x^3+4}{x-2}\leq 0$

23) $\frac{x^3-8}{x-1}+\frac{x^2+3x+2}{x+4}\geq 0$

24) $\frac{3x^3-2x^2+5}{2x+1}-\frac{x^3+1}{x-3}<0$

25) $\frac{x^3+5x^2-6x}{x+2}+\frac{x^2-4}{x-1}\geq 0$

26) $\frac{x^3-27}{x+3}-\frac{x^2+9}{x-4}>0$

27) $\frac{2x^3-5x^2+3x}{x+1}+\frac{x^2-1}{x-5}\leq 0$

28) $\frac{x^3+8}{x+2}-\frac{x^2-4}{x+1}\geq 0$

29) $\frac{x^3-64}{x-4}+\frac{x^2+5x+6}{x+2}<0$

30) $\frac{3x^3+2x^2-8x+3}{x+2}-\frac{x^3+1}{x-1}\leq 0$

31) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}+\frac{x-1}{x+2}>0$

32) $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-9}-\frac{x+4}{x-3}\leq 0$

33) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-1}\geq 0$

34) $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-16}-\frac{x-5}{x+4}<0$

35) $\frac{x^2+6x+8}{x^2-25}+\frac{x-3}{x+5}\geq 0$

36) $\frac{2x^2-7x+6}{x^2-36}-\frac{x+1}{x-6}>0$

37) $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}+\frac{x-2}{x-3}\leq 0$

38) $\frac{3x^2-8x+4}{x^2-2x-3}-\frac{x+2}{x+1}\geq 0$

39) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-5x+6}+\frac{x-1}{x-2}<0$

40) $\frac{2x^2-3x-2}{x^2-6x+8}-\frac{x+3}{x-4}\leq 0$

41) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}+\frac{x-1}{x-3}>0$

42) $\frac{2x^2-7x+3}{x^2-2x-8}-\frac{x+2}{x-4}\leq 0$

43) $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}+\frac{x-2}{x-1}\geq 0$

44) $\frac{3x^2-5x-2}{x^2-9}-\frac{x+1}{x+3}<0$

45) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+6}+\frac{x-4}{x-2}\geq 0$

46) $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}-\frac{x-5}{x+1}>0$

47) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}+\frac{x-3}{x+2}\leq 0$

48) $\frac{3x^2+4x-4}{x^2-16}-\frac{x-2}{x+4}\geq 0$

49) $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}+\frac{x-1}{x-3}<0$

50) $\frac{2x^2-5x+2}{x^2-25}-\frac{x+3}{x-5}\leq 0$

51) $\frac{x^3-3x^2+4x-12}{x^2-4}+\frac{x-2}{x+2}>0$

52) $\frac{2x^3-5x^2+3x}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}\leq 0$

53) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-1}+\frac{x-3}{x+1}\geq 0$

54) $\frac{3x^3-2x^2-8x+5}{x^2-16}-\frac{x-5}{x+4}<0$

55) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-25}+\frac{x-4}{x-5}\geq 0$

56) $\frac{2x^3+3x^2-11x-6}{x^2-36}-\frac{x+2}{x-6}>0$

57) $\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}+\frac{x-1}{x-2}\leq 0$

58) $\frac{3x^3+2x^2-5x-2}{x^2-9}-\frac{x+3}{x+3}\geq 0$

59) $\frac{x^3+5x^2+6x}{x^2-6x+8}+\frac{x-2}{x-4}<0$

60) $\frac{2x^3-7x^2+3x+2}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}\leq 0$

Quesito 1. Ricava utilizzando $\vec{f}=m\vec{a}$, la conservazione della quantità di moto.

Quesito 2. Dopo aver riportato la definizione di velocità istantanea, spiega come si ricava dalla legge oraria $s(t)=\frac{2027}{1026}t^3-\frac{2025}{2024}$ la legge della velocità $v(t)=\frac{2027}{342}t^2$

Problema 1. Una pallottola di 3.5 g viene sparata orizzontalmente verso un blocco di legno di 4 kg fermo su un pavimento liscio. La pallottola si conficca nel pezzo di legno, che inizia a muoversi a 1.4 $\frac{m}{s}$. Calcola la velocità iniziale della pallottola?

Problema 2. Willy Coyote si accorge di avere un burrone davanti a sé ad una distanza $D = 25\ m$. Sapendo che stava correndo alla velocità $v_0 = 27\ \frac{km}{h}$ e che inizia a rallentare con una decelerazione $a = 1.15\ \frac{m}{s^2}$,

a) verifica che si ferma prima di cadere, determina l'istante t in cui si ferma e la distanza d dal bordo del burrone.
   Se decide di rallentare a soli 5 m dal burrone,

b) calcola l'accelerazione necessaria per fermarsi.

55 Da svolgere, assolutamente, sia il quesito che il problema

Quesito 1. Dimostra il seguente

Teorema. *In un triangolo ABC sia AD una bisettrice, allora si ha che:*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Problema 1. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

1) $\dfrac{x^8 - 65x^4 + 784}{81 - x^4} \geq 0$;

2) $\sqrt{\dfrac{x^3 - x^2}{x+1}} < x$;

3) $\sqrt{7x - x^2} \geq x - 5$;

4) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} > \sqrt{7x+4}$;

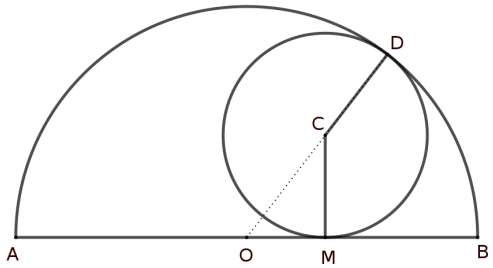
5) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{2} \geq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\,(2+\sqrt{x})}$;

6) $\sqrt[3]{x-1} \leq \sqrt[3]{x^2+1}$.

56 Svolgerne due fra i quattro problemi proposti

Problema 2. Data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$, sia $M \in AB$, costruisci la circonferenza di centro C tangente ad AB in M ed alla semicirconferenza in D. Determina la posizione di M in modo tale che

$$AM + CD + MC = \frac{5}{4}r$$



Chi riuscisse a descrivere il luogo dei centri delle circonferenze di centro O e raggio OM al variare della posizione di M, è esonerato da svolgere questo e il secondo problema richiesto per questa sezione.

Problema 3. Sia N un numero di due cifre tale che la somma delle cifre è pari a 8. Scambiando fra loro le cifre si ottiene un numero che supera di 18 N. Trova N.

Problema 4. Sia ABC il triangolo rettangolo di cateti $AB = 3$ e $BC = 4$. Determina la posizione di $P \in BC$ in modo tale che la somma dei quadrati delle distanze dal cateto AB e dall'ipotenusa BC sia uguale a $m = \frac{72}{17}$.
Problema 5. Due amici si sono iscritti alla prima classe di un liceo. In questo liceo ci sono solo due sezioni, le cui prime classi hanno rispettivamente n ed m studenti con n, m compresi fra 20 e 30.
Sapendo che la probabilità che i due amici si trovino nella stessa classe è $\frac{1}{2}$, calcola quanti sono gli studenti nelle due classi.

57 Svolgere i tre problemi proposti

Problema 6. Dato il quadrato $ABCD$ di lato l, siano M e N i punti medi dei lati consecutivi BC e CD rispettivamente. Traccia i segmenti AM, BN e la diagonale AC. Indicati con H il punto di intersezione tra AM e BN e con K il punto di intersezione tra BN e AC, calcola HK.
Problema 7. Andrea va a scuola ogni giorno con lo stesso autobus, dal lunedì al venerdì. La probabilità p di trovare un posto libero a sedere è distribuita come indicato in tabella:

Giorno	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì
Probabilità p	10%	20%	30%	20%	10%

Sapendo che ha trovato posto una sola volta, qual è la probabilità che sia successo di giovedì?
Problema 8. Calcola l'equazione ($y = ax^2 + bx + c$) della parabola $\mathcal{P}$ in cui $O = (0, 0) \in \mathcal{P}$, $A = (4, 0) \in \mathcal{P}$ e la bisettrice del primo e terzo quadrante è tangente a $\mathcal{P}$.

La seguente
Definizione. La funzione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, dove $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}$, tale che $\forall x \in \mathbb{A}\, f(x) \in \mathbb{B}$, si definisce periodica se $\exists T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{A}$ si ha che $f(x + T) = f(x)$.

dovrebbe esserti nota, ma nel dubbio . . . ti è stata riportata.

58 Svolgi almeno uno fra i seguenti quesiti

Quesito 2. Dato un numero reale x, si indica con $\lfloor x \rfloor$ la parte intera di x, cioè il massimo intero relativo che è $\leq x$([a]).

i) Dimostra che la funzione $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, che è detta mantissa, è periodica(usa la definizione 57).
ii) disegna il grafico della mantissa di x.

Quesito 3. Fra tutti i triangoli in cui sono assegnati la lunghezza di un lato e l'area, trovare quello di perimetro minimo.

[a] $\lfloor \sqrt{2} = 1 \rfloor$, $\lfloor 9.89 \rfloor = 9$

59 Meglio svolgere anche questo quesito

Quesito 4. Eseguendo le seguenti righe di codice([a]),

```
def OpP(x1,y1,x2,y2) :
    rez = x1*x2-y1*y2
    imz = x1*y2+x2*y1
    return rez, imz

Ax = 1
Ay = 0
Bx = sqrt(3)/2
By = 1/2
P = []
for k in range(13) :
    P.append([Ax,Ay])
    Ax,Ay = OpP(Ax,Ay,Bx,By)
figura = plt.figure(figsize=(6,6))
P = np.array(P,dtype = np.float64)
plt.plot(P[:,0],P[:,1],'k-',linewidth=0.75)
plt.show()
```

cosa si ricava? Motiva la risposta.

[a] Ovviamente è necessario caricare le opportune librerie

60 Questo quesito, forse, è meglio risolverlo a casa!

Quesito 2027. Sia a_n la successione così definita $\forall n \geq 1$: $\begin{cases} a_1 = 2026 \\ a_2 = 2025 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \end{cases}$ Determina $2a_{2025} - a_{2026}$.

Esercizio 21. In un trapezio rettangolo circoscritto ad un cerchio con il raggio di 12 m la somma dei quadrati costruiti sui quattro lati è equivalente a 2426 m^2. Determinare le basi. [R. 21 m e 28 m]

Esercizio 22. In un trapezio isoscele circoscritto ad un semicerchio la somma delle basi è $16a$ e una diagonale è $a\sqrt{85}$. Determinare le basi $2x$ e $2y$. [R. $10a$ e $6a$; ovvero $34a/3$ e $14a/3$]

Esercizio 23. Determinare l'area di un trapezio circoscritto ad un semicerchio il cui raggio misura r, sapendo che i lati obliqui formano con la base maggiore angoli di 60° e 45°. [R. $r^2\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}-1\right)/2$]

Esercizio 24. Da un punto di una circonferenza si conducono un diametro ed una corda. La proiezione della corda sul diametro è inferiore di 12 m alla corda stessa, e la differenza fra il diametro e detta proiezione è 36 m. Determinare la corda e il diametro. [R. 24 m e 48 m]

Esercizio 25. Il perimetro di un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio è 100 m e la base maggiore supera di 15 m i 5/2 della base minore. Calcolare il rapporto fra la diagonale del trapezio e il raggio della circonferenza inscritta. [R. $\sqrt{41} : 2$]

Esercizio 26. Un trapezio circoscritto ad un cerchio ha le basi di 5 cm e 40/3 cm; è noto, inoltre, che uno dei lati obliqui è diviso dal punto di tangenza in parti che stanno come 1 sta a 4. Determinare il raggio del cerchio. [R. 4 cm]

Esercizio 27. Ad un cerchio di raggio 6 m è circoscritto un trapezio isoscele avente le diagonali di $4\sqrt{34}$ m. Determinare le basi del trapezio. [R. 4 m e 36 m]

Esercizio 28. In un trapezio rettangolo il lato perpendicolare alle basi è uguale alla base minore; il lato obliquo, di lunghezza a, è i 4/3 della sua proiezione sulla base maggiore. Si determini la lunghezza della proiezione della base minore sul prolungamento del lato obliquo. [R. $3a\sqrt{7}/16$]

Esercizio 29. Determinare i cateti di un triangolo rettangolo, conoscendo la somma $34a$ del doppio dell'uno con il triplo dell'altro e l'ipotenusa $10a$. [R. $6a$ e $8a$; ovvero $126a/13$ e $32a/13$]

Esercizio 30. Determinare il lato del quadrato inscritto in una semicirconferenza avente il raggio di 90 m. Un lato del quadrato sta sul diametro. [R. $36\sqrt{5}$ m]

Esercizio 31. In un cerchio sono date due corde AB e CA', che si intersecano in un punto H. Si sa che A e A' sono punti diametralmente opposti, che $3HC = 2A'H$, $AH = 10$ m, $HB = 5,4$ m. Tracciate le due corde simmetriche delle date rispetto al centro O del cerchio, si calcoli l'area del parallelogramma limitato dalle quattro corde. [R. 72 m^2]

Esercizio 32. In un triangolo viene inscritto un rettangolo di cui il perimetro è 38 m. Calcolare le dimensioni del rettangolo sapendo che la base e l'altezza del triangolo sono uguali, rispettivamente, a 40 m e 12 m. [R. 9 m e 10 m]

Esercizio 33. In un triangolo rettangolo ipotenusa e altezza ad essa relativa sono uguali a 30 cm e 14, 4 cm. Determinare il lato del quadrato inscritto nel triangolo ed avente due lati consecutivi sui cateti. [R. 72/7 cm]

Esercizio 34. In un cerchio di raggio r è inscritto un trapezio le cui basi sono uguali al lato dell'esagono regolare e al lato del triangolo equilatero inscritti. Determinare uno dei lati obliqui del trapezio, sapendo che questo non contiene il centro del cerchio. [R. $r\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) : 2$]

Esercizio 35. Risolvere il problema precedente nel caso che il trapezio contenga il centro del cerchio. [R. $r\sqrt{2}$]

Esercizio 36. Un quadrilatero $\mathbf{Q} = ABCD$ è simmetrico rispetto alla diagonale AC. Si sa che l'angolo in A è retto e che, detto H il punto di incontro delle diagonali, il segmento AH è 17 di HC. Determinare il perimetro di Q sapendo che la sua area è 16 m^2. Dimostrare, poi, che Q è circoscrivibile ad un cerchio e calcolare il raggio di tale cerchio. [R. 24 m, 4, 3 m e $\sqrt{2}/3$ m]

Esercizio 37. Il perimetro di un rettangolo è $2p$; è noto che dividendo per metà l'altezza e raddoppiando la base il perimetro non varia. Calcolare i lati. [R. $p/3$ e $2p/3$]

Esercizio 38. Determinare le lunghezze x, y delle dimensioni di un rettangolo, di cui si conosce la misura $2p$ del perimetro, sapendo che, se la lunghezza del lato x si aumenta di a e quella del lato y si diminuisce di b, l'area del rettangolo non varia. [R. $\frac{b(p+a)}{a+b}$ e $\frac{a(p-b)}{a+b}$]

Esercizio 39. In un cerchio, il cui raggio è di 18 m, è inscritto un quadrilatero con le diagonali perpendicolari: una è un diametro e l'altra è uguale al lato del quadrato inscritto. Determinare i lati del quadrilatero. [R. $18\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ m]

Esercizio 40. Un triangolo isoscele è inscritto in un cerchio. L'altezza relativa alla base è tripla di questa e la loro somma è 16 dm. Calcolare la distanza dei lati obliqui dal centro del cerchio e il raggio di questo. [R. $\sqrt{37}/6$ dm e 37/6 dm]

Esercizio 41. L'altezza di un triangolo è 2 m. Condurre una parallela alla base, secante il triangolo, in modo che l'area del trapezio ottenuto sia media proporzionale fra l'area del triangolo iniziale e quella del triangolo residuo. Si calcoli la distanza x di tale parallela dal vertice opposto alla base. [R. $(\sqrt{5}-1)$ m]
Esercizio 42. Un trapezio isoscele di area s^2 è circoscritto ad un cerchio il cui raggio misura r. Determinare le basi e dire per quali valori di s il problema è possibile. [R. $s \geqslant 2r$]
Esercizio 43. È dato un triangolo ABC in cui $\overline{AB} = c$, $BC = a$, $CA = b$. Posto $a+b+c = 2p$, determinare un punto M di AB in modo che, condotto il segmento MN parallelo a BC (con N su AC), il trapezio $BCNM$ abbia perimetro di lunghezza $2s$. [R. $s - c(p-s) : (p-a)$]
Esercizio 44. Ad un rettangolo di dimensioni a e b circoscrivere un triangolo rettangolo in modo che l'angolo retto del triangolo coincida con un angolo del rettangolo e che la somma dei cateti sia uguale a $2a+2b$. [R. I cateti sono $2b$ e $2a$; ovvero $a+b$ e $a+b$]
Esercizio 45. Dato un triangolo rettangolo i cui cateti misurano b e c (con $b > c$), si determinino le misure dei lati di un rettangolo inscritto, avente un angolo retto in comune col triangolo, sapendo che il perimetro del rettangolo misura $2p$. Dimostrare che il problema è possibile solo se $c < p < b$. [R. $\frac{b(p-c)}{b-c}$ e $\frac{c(b-p)}{b-c}$]
Esercizio 46. È dato un triangolo rettangolo ABC nel quale i cateti AB e AC sono uguali, rispettivamente, a 10 m e a 24 m. Determinare a quale distanza da C si deve prendere un punto D dell'ipotenusa BC affinché i triangoli CAD, DAB siano il primo i 4/9 del secondo. [R. 8 m]
Esercizio 47. Un trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in un semicerchio di diametro $AB = 2r$ e l'angolo sotto cui è vista la base minore dal punto di incontro delle diagonali è di 120°. Determinare il perimetro del triangolo che ha per base la base maggiore e gli altri lati sulle rette dei lati obliqui. [R. $6r$]
Esercizio 48. Calcolare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo sapendo che la differenza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è uguale all'altezza h ad essa relativa. [R. $h\sqrt{5}$]
Esercizio 49. Determinare il cateto maggiore di un triangolo rettangolo sapendo che la mediana ad essa relativa è $2\sqrt{6}s/5$ e che la somma dei cateti è $2s$. [R. $(40 \pm 4\sqrt{5})s/25$]
Esercizio 50. In un semicerchio di centro O e diametro $AB = 2r$ si consideri il raggio OC perpendicolare ad AB. Determinare un punto M della semicirconferenza in modo che, dette H e K le sue proiezioni su AB ed OC, si abbia $2MA^2 = 15MK^2$. [R. $4H = 3r/5$; ovvero $4H = 5r/3$]
Esercizio 51. In un semicerchio di diametro $AB = 2r$ si inscrive un trapezio isoscele $AMNB$. Determinare il punto M in modo che sia $MN = 2AM$. [R. $4M = r(\sqrt{3}-1)$]
Esercizio 52. Determinare i cateti di un triangolo rettangolo del quale si conosce il perimetro $60a$ e la differenza $14a$ dei cateti stessi. [R. $24a$ e $10a$]
Esercizio 53. In un triangolo di base e altezza lunghe rispettivamente b e h, inscrivere un rettangolo di area s^2. Per quali valori di s^2 il problema è possibile? [R. $s^2 \leqslant bh/4$]
Esercizio 54. Le misure dei cateti AB e BC di un triangolo rettangolo sono $3a$ e $4a$; M ed N sono due punti appartenenti rispettivamente ai cateti AB e BC, tali che la retta MN è parallela all'ipotenusa AC. Condurre da M e da N le perpendicolari MH ed NK ad AC. Determinare BM in modo che la somma delle aree dei triangoli MNB, AMH, CNK sia uguale a $10a^2/3$. [R. a; ovvero $2a$]
Esercizio 55. Ad un quadrato, con il lato di 12 cm, circoscrivere un triangolo rettangolo in modo che abbia l'angolo retto in comune con un angolo del quadrato. È noto che la somma dei cateti è 54 cm. Calcolare i lati del triangolo. [R. 18 cm, 36 cm e $18\sqrt{5}$ cm]
Esercizio 56. Un rettangolo $ABCD$ è inscritto in un semicerchio di raggio r, con il lato CD sul diametro. Sia E il punto di incontro delle tangenti al semicerchio in A e in B. Determinare il perimetro del triangolo AEB sapendo che $AB = 4BC$. [R. $4r(5+\sqrt{5}) : 5$]
Esercizio 57. Determinare le diagonali di un trapezio rettangolo sapendo che il perimetro è uguale a $(10 + 10\sqrt{3} + 5\sqrt{2})$ cm e che il lato obliquo e la diagonale minore formano con la base maggiore angoli di 45° e 30°. [R. 10 cm e $5\sqrt{5+\sqrt{12}}$ cm]
Esercizio 58. Determinare l'altezza di un trapezio conoscendo la differenza delle basi $2d$ e sapendo che gli angoli alla base maggiore sono di 30° e 45°. [R. $d(\sqrt{3}-1)$]
Esercizio 59. Le misure in cm di tre segmenti formano una progressione aritmetica di ragione 4. La somma delle misure stesse è 36. Determinare un segmento x tale che aumentando di x i tre segmenti dati si ottengano i tre lati di un triangolo rettangolo. [R. $x = 4$ cm]
Esercizio 60. Due cerchi di raggi r e $2r$ sono tangenti internamente in un punto A. Condurre, parallelamente alla tangente in A ai due cerchi, una secante comune in modo che la somma dei quadrati delle due corde così determinate sui due cerchi sia equivalente al doppio della somma dei quadrati costruiti sui due raggi. [R. $x = r \cdot 2$]
Esercizio 61. Calcolare le lunghezze dei tre lati x, y, z di un triangolo rettangolo, sapendo che il lato y è la semisomma degli altri due, e che il numero che esprime l'area del triangolo è uguale a quello che esprime la misura del suo perimetro. [R. 6, 8 e 10]

Esercizio 62. La somma $x + y$ dei cateti di un triangolo rettangolo è 35 m e l'altezza relativa all'ipotenusa è 12 m. Determinare i lati. [R. 15 m, 20 m e 25 m]
Esercizio 63. Determinare la base e l'altezza di un triangolo isoscele conoscendone la somma $16r/5$ e il raggio r del cerchio circoscritto. [R. $8r/5$, $8r/5$; ovvero $48r/25$, $32r/25$]
Esercizio 64. Un trapezio, inscritto in un semicerchio di raggio 10 m, ha l'altezza uguale ai 12/25 della base maggiore (coincidente con il diametro). Trovare il perimetro del trapezio e le aree delle quattro parti nelle quali le diagonali dividono il trapezio. [R. $49,6$ m; $75\,\mathrm{m}^2$, $5,88\,\mathrm{m}^2$ e $21\,\mathrm{m}^2$]
Esercizio 65. Determinare i cateti di un triangolo rettangolo del quale è noto che la differenza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $5a\sqrt{13} : 13$ e l'altezza relativa all'ipotenusa è $6a\sqrt{13} : 13$. [R. $3a$ e $2a$]
Esercizio 66. Condurre una corda di un cerchio parallela ad una tangente di questo in modo che il rettangolo avente per lato la corda e il lato opposto sulla tangente abbia la diagonale uguale al diametro $2r$ del cerchio. [R. $r/3$]
Esercizio 67. In un triangolo equilatero, avente il lato di 56 m, si conduce un segmento parallelo ad un lato e con gli estremi sugli altri due. Determinare la lunghezza di questo segmento sapendo che esso scompone il triangolo dato in un triangolo equilatero e in un trapezio isoscele, tali che il secondo ha un perimetro doppio del primo. [R. 24 m]
Esercizio 68. Due circonferenze di raggi R ed r (con $R > r$) sono tangenti esternamente. Determinare la distanza del punto P d'incontro delle tangenti comuni, oblique rispetto alla retta dei centri, dal centro della circonferenza minore ed i segmenti di tangente che congiungono il punto P con i punti di contatto. [R. $r\frac{R+r}{R-r}$; $\frac{2r}{R-r}\sqrt{Rr}$]
Esercizio 69. Due circonferenze di raggi R ed r (con $R > r$) sono l'una esterna all'altra e la distanza dei loro centri è d. Determinare la distanza del centro della circonferenza minore dal punto d'incontro delle due tangenti "esterne" comuni e dal punto d'incontro delle due tangenti "interne" comuni. [R. $\frac{dr}{R-r}$ e $\frac{dr}{R+r}$]
Esercizio 70. Un trapezio isoscele è inscritto in un cerchio e ne contiene il centro. Il lato obliquo, l'altezza e la base maggiore sono uguali rispettivamente a $9\sqrt{10}$ cm, 27 cm e 48 cm. Determinare il raggio del cerchio e le diagonali. [R. 25 cm e $15\sqrt{10}$ cm]
Esercizio 71. Si considerino un cerchio di diametro $AB = 2r$, la tangente t in A e due tangenti u, v condotte al cerchio da un punto P del prolungamento di AB, dalla parte di B. Conoscendo l'angolo $uv = 120°$ si domanda il perimetro del triangolo formato dalle rette t, u, v. [R. $2r(12 + 7\sqrt{3}) : 3$]
Esercizio 72. Due circonferenze i cui raggi stanno come $1 : 2$ sono tangenti internamente in un punto A. Dal punto B della circonferenza maggiore, diametralmente opposto ad A, si traccino le tangenti alla minore. La retta che unisce i punti di contatto individua, sulle due circonferenze, due corde: determinare il rapporto di queste. [R. 1/2]
Esercizio 73. In un triangolo rettangolo ABC i cateti AC e AB sono rispettivamente 12 cm e 9 cm. Sul prolungamento dell'ipotenusa CB, dalla parte di B, si determini un punto M tale che, detto N il punto di incontro della retta AC con la perpendicolare in M a CM, risulti $\widehat{MN}^2 = 4 \cdot \widehat{BM} \cdot \widehat{AB}$. [R. $BM = 9$ cm; ovvero $BM = 25$ cm]
Esercizio 74. Trovare le misure x, y (con $x > y$) dei cateti di un triangolo rettangolo, di ipotenusa lunga a, sapendo che il rettangolo dei cateti è equivalente alla differenza dei quadrati costruiti su di essi. [R. $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$]
Esercizio 75. In un cerchio di raggio r si traccino due diametri perpendicolari. Determinare il perimetro del quadrato che ha per vertici i centri dei quattro cerchi tangenti ai due diametri e, internamente, alla circonferenza data. [R. $8r(\sqrt{2} - 1)$]
Esercizio 76. In un triangolo equilatero di lato l condurre un segmento x parallelo ad un lato e con gli estremi sugli altri due, in modo che il triangolo isoscele che ha per vertice il punto medio di questo lato e per base il segmento x sia i 4/25 del triangolo dato. [R. $x = 4l/5$; ovvero $x = l/5$]
Esercizio 77. Determinare un punto M dell'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio r, in modo che AM sia uguale alla distanza di M dalla retta OB. [R. $AM = r(\sqrt{3} - 1)$]

61 Problemi in cui è richiesta dimostrazione

61.1 Ipotesi

Cosa ci fornisce il problema, tutto ciò che è dato.

61.2 Tesi

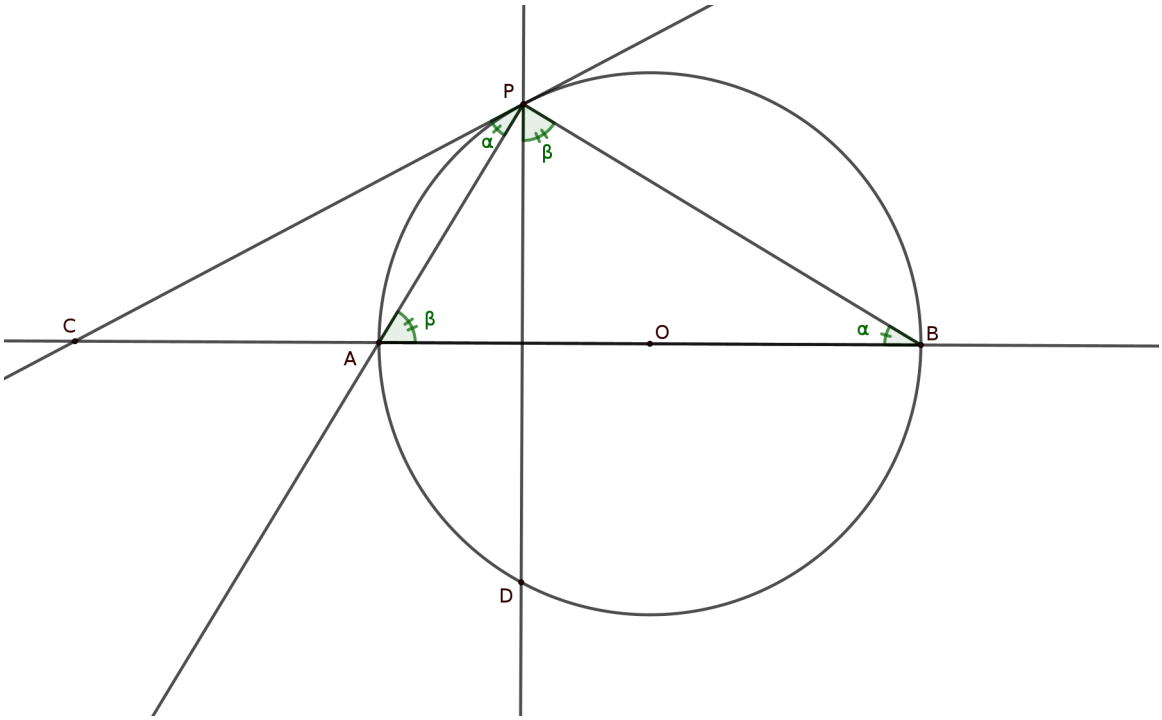
Cosa si deve ricavare.

Dimostrazione. Costruire una figura chiara e precisa; formulare, se necessario, una tesi equivalente; indicare nei passaggi dimostrativi la teoria che si utilizza. □

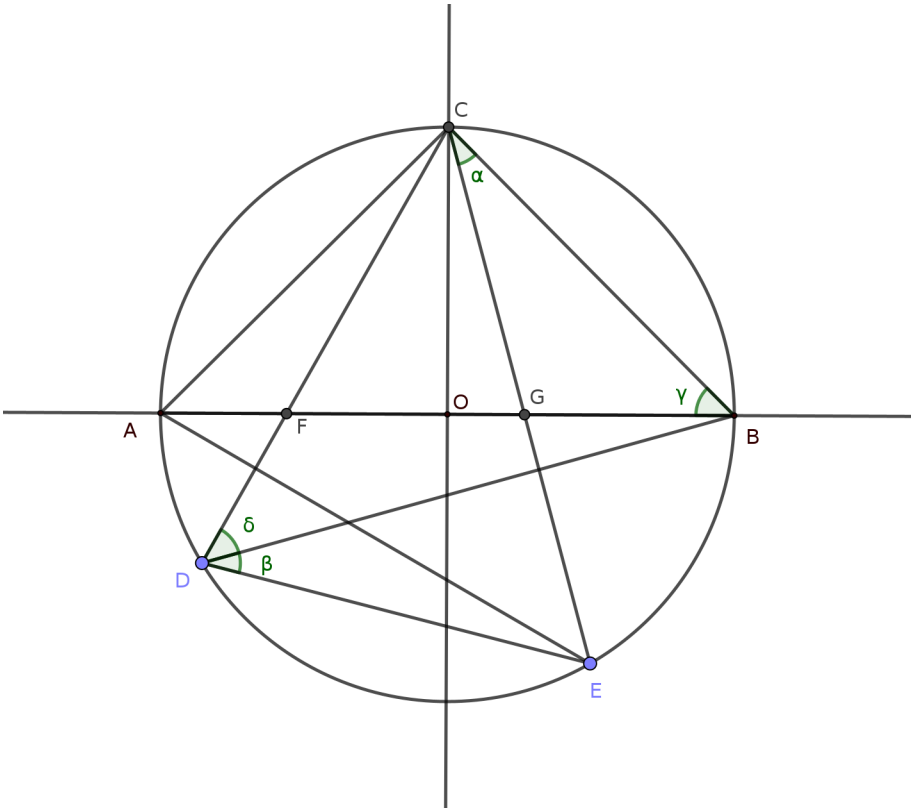
62 Esercizi assegnati per il 3 ottobre

Come aiutino alcune figure guidate. Utilizzando lo schema sopra riportato per scrivere la dimostrazione:

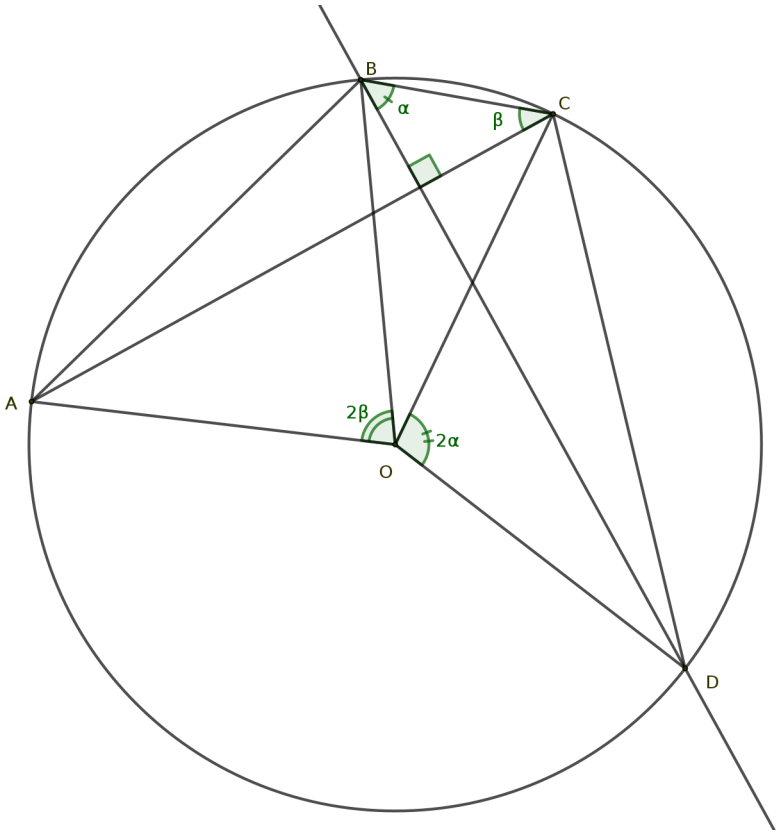
62.1 ex. 188



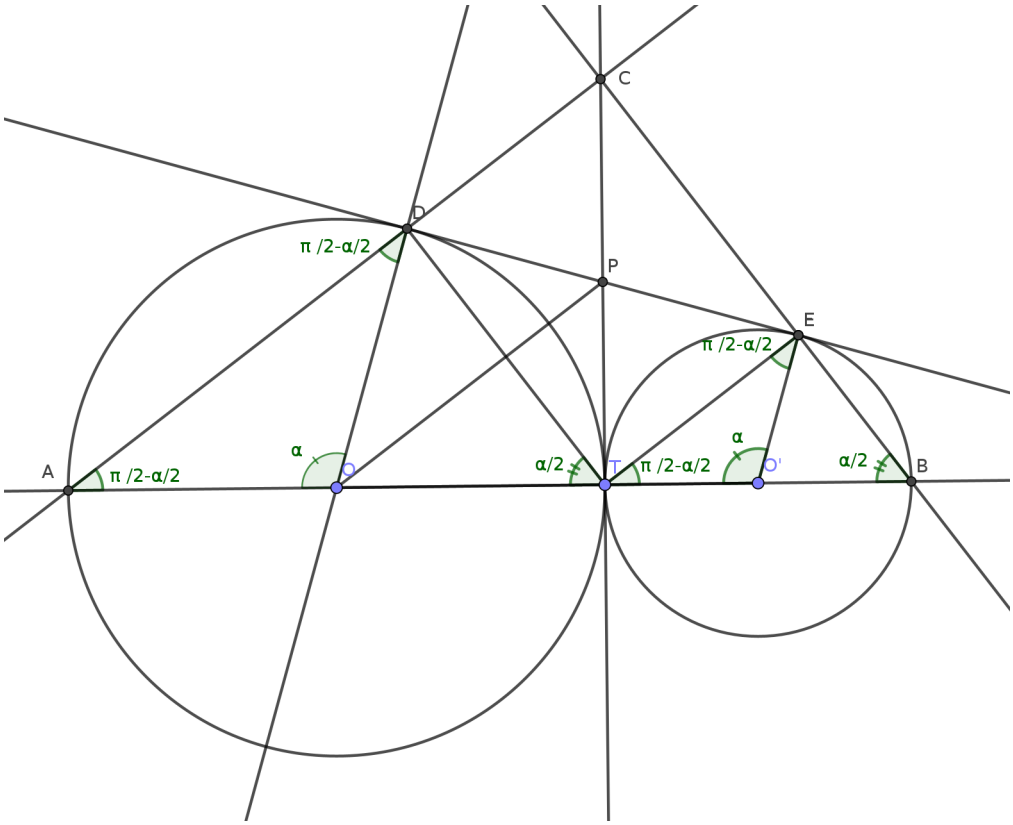
62.2 ex. 200



62.3 ex. 212

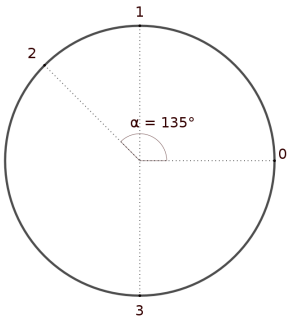


62.4 ex. 208



Problema 1. Una particella di massa $m = 10\ g$ si muove, descrivendo una traiettoria circolare (circonferenza di raggio $R = 5\ cm$), con una velocità $\vec{v}$ il cui modulo $|\vec{v}| = 2\ \frac{cm}{s}$.

1) Calcola l'energia della particella m nelle posizioni 0,1,2 e 3;
2) calcola la forza $\vec{F}$ applicata ad m nella posizione 3(utilizza la scrittura $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$).([a])



[a] la particella si muove su un piano orizzontale e quindi non è soggetta a gravità.

Quesito 1. Una massa m, inizialmente in quiete, viene accelerata da una forza costante $\vec{F}$, se si muove su una traiettoria rettilinea, calcola la legge oraria del moto.

Se $\vec{F}$ si mantiene costante in modulo ma varia in direzione e verso, quale potrebbe essere la traiettoria di m. Motiva le risposte.

Problema 2. Un carrello di massa M trasporta 100 palline di naftalina di massa totale M. Il carrello inizialmente si muove di moto rettilineo uniforme con velocità di modulo v. Nell'istante $t_0 = 0$ le palline di naftalina iniziano a sublimare([1]), supponiamo che ogni T secondi una pallina sublimi.

1) Calcola la velocità del carrello dopo $2T$ secondi;

2) calcola la velocità del carrello quando tutta la naftalina è sublimata

[1] sublimazione passaggio da stato solido ad aeriforme

Quesito 2. Abbiamo ricavato che il lavoro W necessario per sollevare una massa m dal suolo ad una altezza h è pari a $W = mgh$.

a) Spiega perché W non dipende dal percorso.

b) Come deve essere sollevata la massa affinché il lavoro sia esattamente quello indicato?

Problema 3. Un corpo di massa m viene "moooolto lentamente" (vedi quesito 2 b) trainato lungo una dorsale di una collina (Fig.19) da una forza $\vec{F}$ che in ogni punto è diretta lungo la tangente alla traiettoria.
Calcola il lavoro compiuto dalla forza, nell'ipotesi che l'altezza della collina sia h, la lunghezza della sua base sia ℓ e il coefficiente di attrito k.

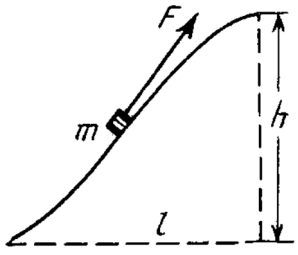


Figura 19

Problema 4. Una massa m si trova su un piano inclinato (vedi figura 20), che forma con il suolo un angolo α. m viene lanciata da una altezza h con velocità in modulo v ed una inclinazione ϑ. Ricava la legge oraria del moto e la sua traiettoria.

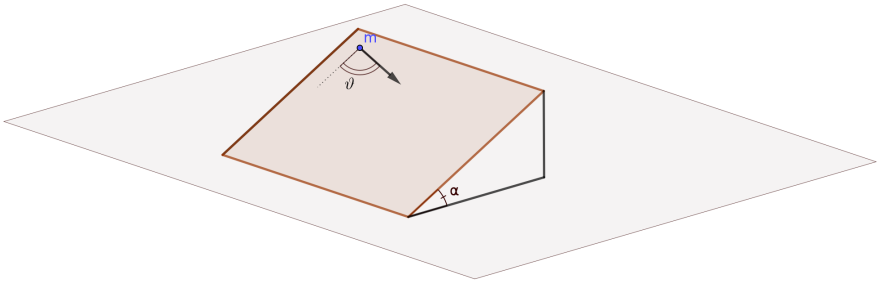


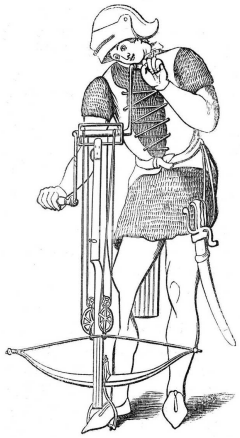
Figura 20

Problema 1. Risolvi in $\mathbb{R}$:

1) $\dfrac{x^3-x^2}{x^4+x^2+1} \geq 0$; 2) $\dfrac{x^3+x^2}{3}+\dfrac{x^2}{x+3} < x^3-\dfrac{x^2}{3x+9}$; 3) $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x^2-1} \leq 1$.

Problema 2. Dati i punti $A=(-3,0)$ e $B=(1,0)$ calcola l'equazione delle parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate che intersecano l'asse y in un punto la cui distanza da A è $3\sqrt{2}$.
Sia $\mathcal{P}_1$ la parabola con la concavità rivolta verso il basso, calcola l'equazione della circonferenza che passa per A per l'origine $O=(0,0)$ e per il punto di intersezione della parabola con l'asse delle ordinate.

Problema 3. Il balestriere Guglielmo scaglia le frecce della sua balestra verso un bersaglio posto a 36 m e situato ad una altezza di 2.5 m. Sapendo che colpisce il centro 30 volte su 50 tiri, calcola la probabilità che in 10 lanci Guglielmo colpisca il centro ben 9 volte.
Guglielmo scaglia, ora, le sue frecce fino a quando colpisce il centro, qual è la probabilità che si fermi al quinto tiro?



Problema 4. In un triangolo rettangolo con i cateti di $\sqrt{5}$ cm e $2\sqrt{5}$ cm inscrivere un rettangolo con un lato sull'ipotenusa la cui diagonale misura 2 cm. Calcola le dimensioni del rettangolo inscritto.
Problema 5. Data la circonferenza Γ ed il punto $P \notin \Gamma$, conduci per P una retta r che interseca Γ in A e B, dimostra che il rettangolo di dimensioni PA e PB ha area che non dipende dalla scelta di r.
Quesito 1. Enuncia e dimostra il teorema della secante e della tangente
Quesito 2. Ricava che nella parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ il coefficiente angolare della tangente nel suo punto di ascissa x_0 è $m = 2ax_0 + b$.
Problema 6. Dato il rettangolo $\mathcal{R}$, costruisci il rettangolo $\mathcal{R}'$ simmetrico di $\mathcal{R}$ rispetto alla retta che contiene una sua diagonale. Dimostra che $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ è un rombo.

Se le dimensioni di $\mathcal{R}$ sono 24 e 45, calcola l'area del rombo.
Quesito 3. Spiega come è stata ricavata la seguente formula:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{2}$$

Problema 7. Utilizzando la formula 4 spiega perché

$$0.2025202\overline{59} = 0.20252026$$

Quesito 4. Riprendendo la seconda parte del problema 3, calcola la probabilità che Guglielmo prima o poi colpisca il bersaglio.

Problema 8. Chi si ricorda la TaxiGeometria, non ha difficoltà a disegnare una TaxiCirconferenza di centro $C = (2, -3)$ e raggio 3([a]). E, quindi poi, sicuramente potrà costruire il luogo dei punti P la cui somma delle distanze da C e da $D = (2, 3)$ è $3CD$.([b])
Che luogo potrebbe essere quello in figura 23?([c])

[a] Prima richiesta: disegna la TaxiCirconferenza
[b] Seconda richiesta: disegna il TaxiLuogo
[c] Terza richiesta: descrivi il TaxiLuogo

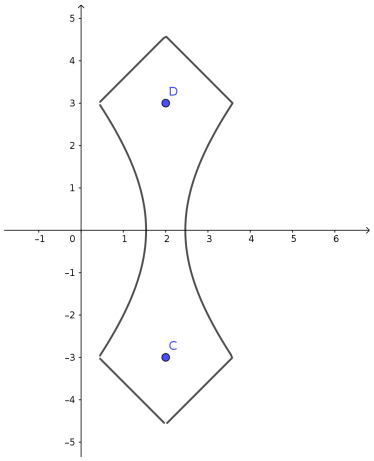


Figura 21

Problema 9. Che luoghi sono rappresentati da queste righe di codice?

```
Ax = -2
Ay = 0
Bx = 2
By = 0
k = 1
x,y = symbols('x,y', real = True)
p = plot_implicit((((x-Ax)**2+(y-Ay)**2)*((x-Bx)**2+(y-By)**2))-k**2,(x, -6, 6),
                                        (y, -6, 6), show=False, size=(5,5))
for j in range(20) :
    k += 1
    p1 = plot_implicit((((x-Ax)**2+(y-Ay)**2)*((x-Bx)**2+(y-By)**2))-k**2,(x, -6, 6),
                                                (y, -6, 6), show=False, size=(5,5))
    p.append(p1[0])
p.show()
```

Problema 10. Three positive integers a, b, c satisfy

$$4^a \cdot 5^b \cdot 6^c = 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$$

Determine the sum of $a + b + c$. (http://comc.math.ca/2017/practice.html)

Problema 1. Risolvi in $\mathbb{R}$:

1) $\dfrac{7x-4}{x^2-4} - \dfrac{2}{x-2} \leq \dfrac{7}{x+2}$;

2) $\sqrt{x-x^2} < \sqrt{7-2x}$

3) $\dfrac{x^3+x^2}{3} + \dfrac{x^2}{x+3} < x^3 - \dfrac{x^2}{3x+9}$;

4) $\dfrac{\sqrt{x^2+6x+8} - x - 5}{x^2-36} \leq 0.$

Problema 2. Dati i punti $A = (-2, 0)$ e $B = (3, 0)$ calcola l'equazione delle parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate([1]) che intersecano l'asse y in un punto la cui distanza da A è $2\sqrt{2}$.
Sia $\mathcal{P}_1 = -\dfrac{1}{3}(x^2 - x - 6)$, calcola l'equazione della circonferenza che passa per B ed è tangente in $C = (0, 2)$ alla retta $r : y = \dfrac{3}{2}x + 2$.

Problema 3. Dopo aver dimostrato che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa(vedi figura 23), considera il triangolo ABC, rettangolo in C, la cui altezza CH relativa all'ipotenusa misura 9.6 cm e la mediana CM misura 10 cm, calcola:

a) l'area del triangolo;

b) il perimetro del triangolo.

[1] $y = ax^2 + bx + c$

Quesito 1. Enuncia e dimostra **uno** fra i seguenti teoremi studiati:

- II teorema di Euclide.
- Teorema delle bisettrici di un triangolo.
- Teorema di Pitagora.
- Teorema delle secanti.

Quesito 2. Ricava la formula della distanza punto $(P = (x_0, y_0))$ retta $(r : y = mx + q)$:

$$d(P, r) = \frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Problema 4. Sia ABC un triangolo, costruisci le bisettrici degli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, traccia le perpendicolari da A alle due bisettrici, siano D ed E i piedi delle perpendicolari sulle bisettrici, dimostra che la retta DE è parallela alla retta BC.

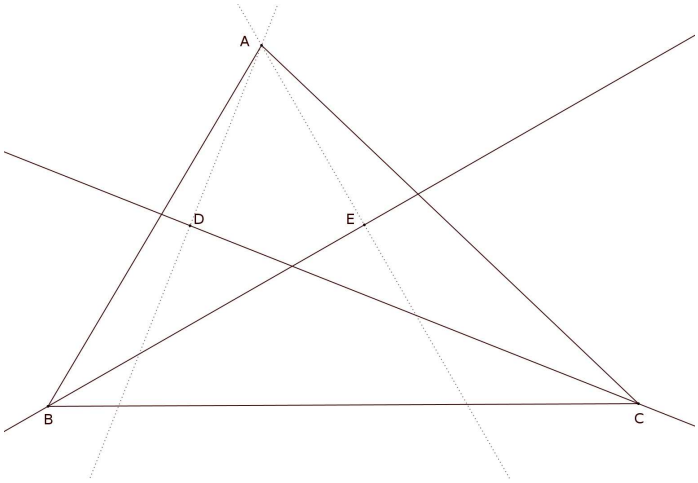


Figura 22: Problema 4

Quesito 3. Come si è ricavata la seguente formula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Problema 5. In un contenitori ci sono 35 palline di cui 10 blu 5 rosse e le restanti bianche. Si estraggono contemporaneamente 3 palline:

a) qual è la probabilità che siano una bianca, una blu ed una rossa?

b) qual è la probabilità che le tre palline siano dello stesso colore(3 bianche **o** 3 blu **o** 3 rosse)?

Problema 6. In un triangolo rettangolo con i cateti di 4 cm e 8 cm inscrivere un rettangolo con un lato sull'ipotenusa la cui diagonale misura $4\sqrt{2}$ cm.

Calcola le dimensioni dei rettangoli inscritti.

Quesito 4. Sia $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \dots a_1x + a_0$ un polinomio monico, indica il grado del polinomio, e spiega cosa si intende per radici di un polinomio.

Data l'equazione $x^2 - sx + p = 0$, spiega perché s è la somma delle radici e p il loro prodotto.

La relazione vale solo quando il $\Delta \geq 0$?

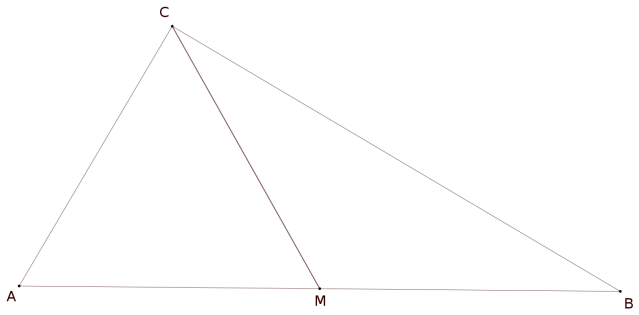


Figura 23: Problema 3