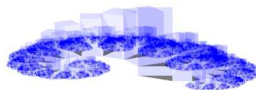


Geometria e metriche

Gianpaolo Gasparin <http://www.joaogas.it>

$2 \cdot 10^{13}$



Definizione

Una figura si dice il luogo geometrico o, più semplicemente il luogo dei punti che godono di una data proprietà, se la figura considerata soddisfa simultaneamente le due seguenti condizioni:

- 1 Ogni punto della figura gode di quella proprietà.
- 2 Ogni punto, che goda di quella proprietà, appartiene alla figura.



Definizione

Una figura si dice il luogo geometrico o, più semplicemente il luogo dei punti che godono di una data proprietà, se la figura considerata soddisfa simultaneamente le due seguenti condizioni:

- 1 Ogni punto della figura gode di quella proprietà.
- 2 Ogni punto, che goda di quella proprietà, appartiene alla figura.



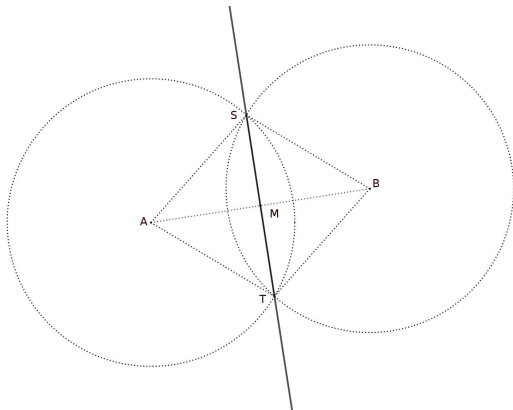
Problema

Descrivi il luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un dato segmento AB .

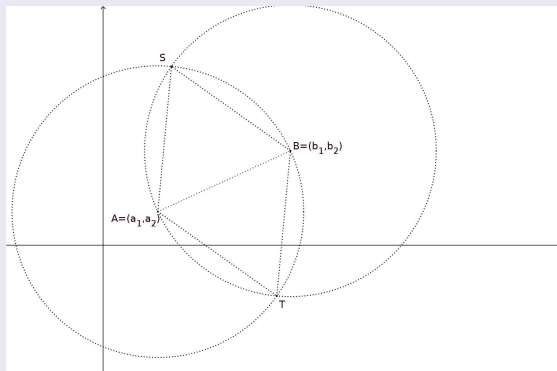


Soluzione.

Sia $\mathcal{L}$ il luogo cercato, sicuramente il punto medio di AB è tale $M \in \mathcal{L}$. Se tracciamo due circonferenze Γ_A e Γ_B di centro rispettivamente A e B con raggio maggiore di AM esse si incontrano in due punti S e T tali che $S, T \in \mathcal{L}$ □



Soluzione algebrica.



Soluzione algebrica.

Possiamo trovare anche l'equazione del luogo $F(x, y) = 0$, siano $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$. Siano Γ_A e Γ_B le circonferenze di centro A e B e raggio $AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = r$, si ricavano le seguenti equazioni: $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$ e $(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 = r^2$ che messe a sistema conducono all'equazione

$$2(b_2 - a_2)y + 2(b_1 - a_1)x - b_1^2 - b_2^2 + a_1^2 + a_2^2 = 0 \quad (1)$$

che è l'equazione del luogo cercato. □



Osservazione

Con opportuni raccoglimenti da (1) si ricava:

$$2(b_2 - a_2) \left(y - \frac{b_2 + a_2}{2} \right) + 2(b_1 - a_1) \left(x - \frac{b_1 + a_1}{2} \right) = 0$$

in cui è evidente che il punto medio M di AB appartiene al luogo!



Alunno	A	B
1	[3, 8]	[2, 1]
2	[4, 0]	[5, 1]
3	[6, 8]	[-4, 6]
4	[6, 8]	[7, 6]
5	[-6, 0]	[1, -8]
6	[-7, -8]	[5, 1]
7	[4, 1]	[-3, -6]
8	[-4, 1]	[2, 8]
9	[3, -3]	[-8, 6]
10	[5, -4]	[-7, -5]
11	[0, -8]	[2, -6]
12	[-4, -4]	[1, 6]
13	[-4, 7]	[-5, 2]
14	[0, -3]	[-2, -1]

Alunno	A	B
15	[0, -5]	[-3, -8]
16	[-5, 3]	[-3, 8]
17	[3, 1]	[-8, 8]
18	[-8, -3]	[7, 2]
19	[-5, -6]	[-1, 0]
20	[5/2, 17/2]	[2, 8]
21	[-7, 0]	[-2, -3]
22	[6, -5]	[-4, -7]
23	[-7, 7]	[-2, -4]
24	[-5, 1]	[0, 0]
25	[7, -8]	[3, -7]
26	[3, 5]	[4, -4]
27	[-6, 0]	[-4, 5]



Esercizio

Utilizzando la costruzione vista (intersezione di circonferenze) ricavare l'equazione del luogo dei punti equidistanti dai propri A e B . Verificare, poi, che la retta ricavata è perpendicolare alla retta AB nel punto medio M di AB .

Condizione di perpendicolarità: $m \cdot m_{\perp} = -1$



Definizione

Uno spazio metrico è una coppia costituita da un insieme S e da una funzione $\rho : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tali che $\forall s_1, s_2, s_3 \in S^2$:

- 1 $\rho(s_1, s_2) = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2$
- 2 $\rho(s_1, s_2) = \rho(s_2, s_1)$
- 3 $\rho(s_1, s_3) \leq \rho(s_1, s_2) + \rho(s_2, s_3)$



Definizione

Uno spazio metrico è una coppia costituita da un insieme S e da una funzione $\rho : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tali che $\forall s_1, s_2, s_3 \in S^2$:

- 1 $\rho(s_1, s_2) = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2$
- 2 $\rho(s_1, s_2) = \rho(s_2, s_1)$
- 3 $\rho(s_1, s_3) \leq \rho(s_1, s_2) + \rho(s_2, s_3)$



Definizione

Uno spazio metrico è una coppia costituita da un insieme S e da una funzione $\rho : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tali che $\forall s_1, s_2, s_3 \in S$:

- 1 $\rho(s_1, s_2) = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2$
- 2 $\rho(s_1, s_2) = \rho(s_2, s_1)$
- 3 $\rho(s_1, s_3) \leq \rho(s_1, s_2) + \rho(s_2, s_3)$



Osservazione

Manfred Spitzer Intelligenza Artificiale settembre 2024

cap. 2 § ORIGAMI DI PROTEINE NELLA BIOLOGIA MOLECOLARE

...

...Ad esempio, per ogni tre atomi all'interno della molecola proteica si applicava la regola della disuguaglianza triangolare. Replicata fino a circa duecento volte l'operazione consentiva di affinare la predizione della struttura proteica.

...



Osservazione

La metrica Euclidea, in cui $\rho = d_E$, tale che per ogni $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ si ha $d_E = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
 $\rho = d_E$ soddisfa a (1), (2) e (3).



(1): $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0$ implica
 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0$ in quanto somma di quadrati è sempre non negativa e si annulla solo se ciascuno dei due addendi è nullo, cioè $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$



(2): discende dalla commutatività della somma

.



(3): discende dal fatto che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due.



